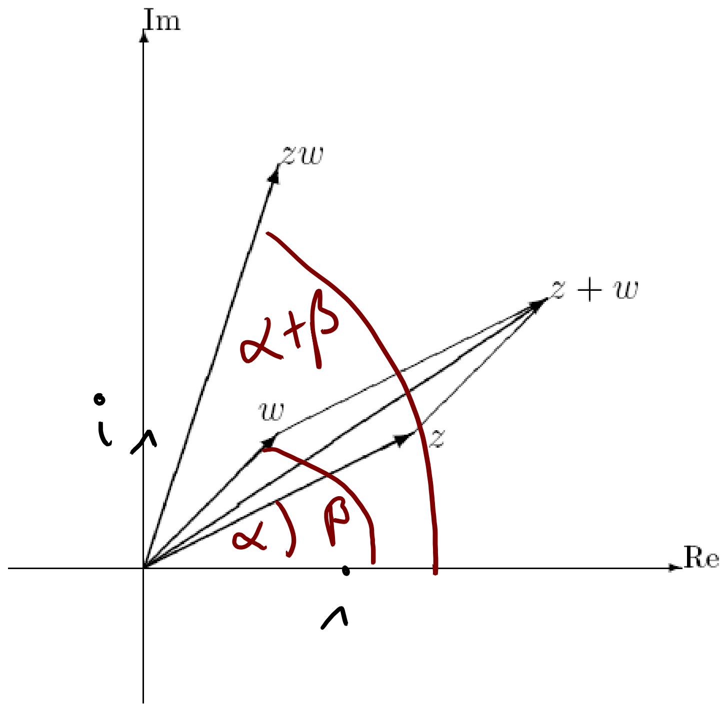
# 6. Vorlesung 8.11.10

## Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

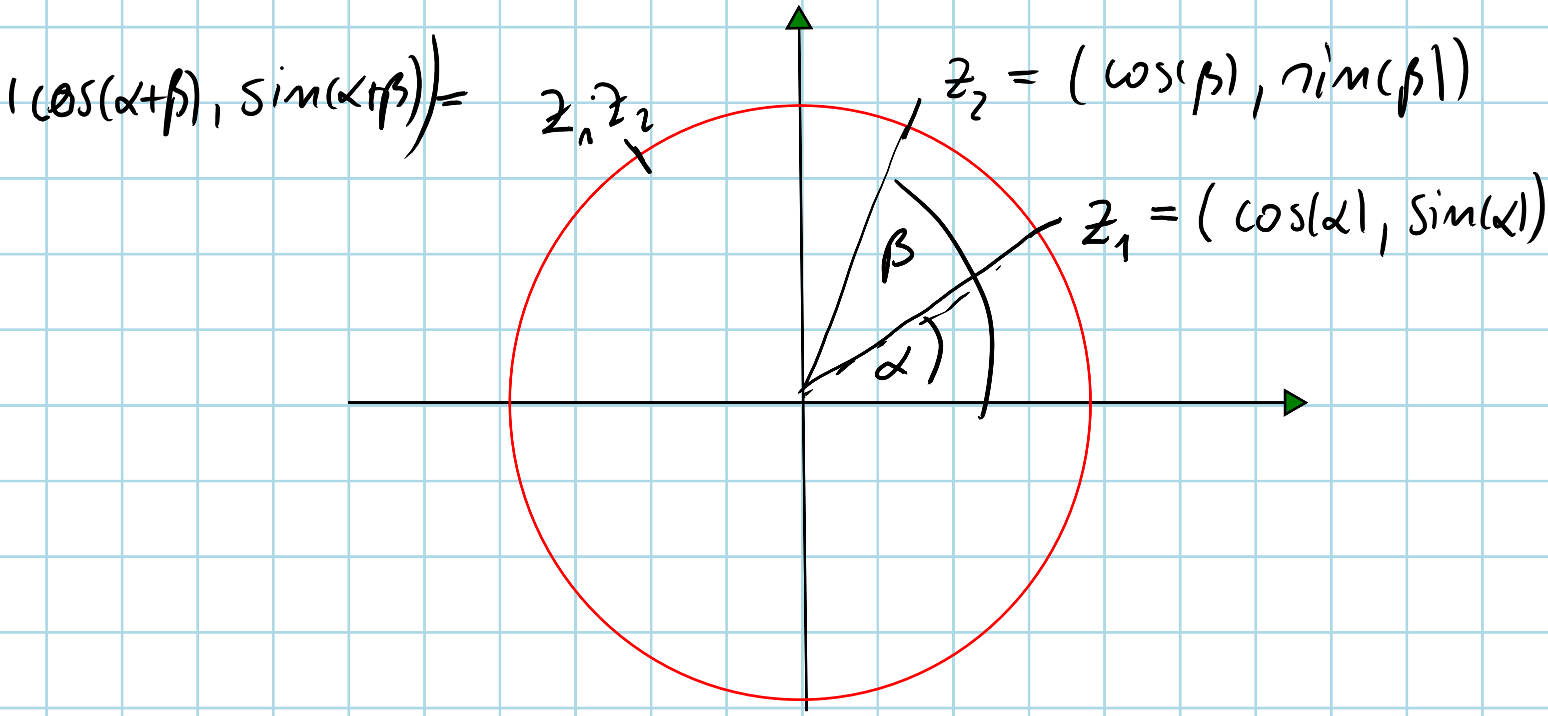



$|zw| = |z||w|$

$z = x + iy$

## Additionstheoreme von sinus/kosinus

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}}$$




$$z_1 \cdot z_2 = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta))$$

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) + i \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\, i \sin(\beta)$$

$$+ \underbrace{i^2}_{-1} \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$+ \cos(\alpha)\sin(\beta))$$

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta)$$

vergleiche Real- und Imaginärteil

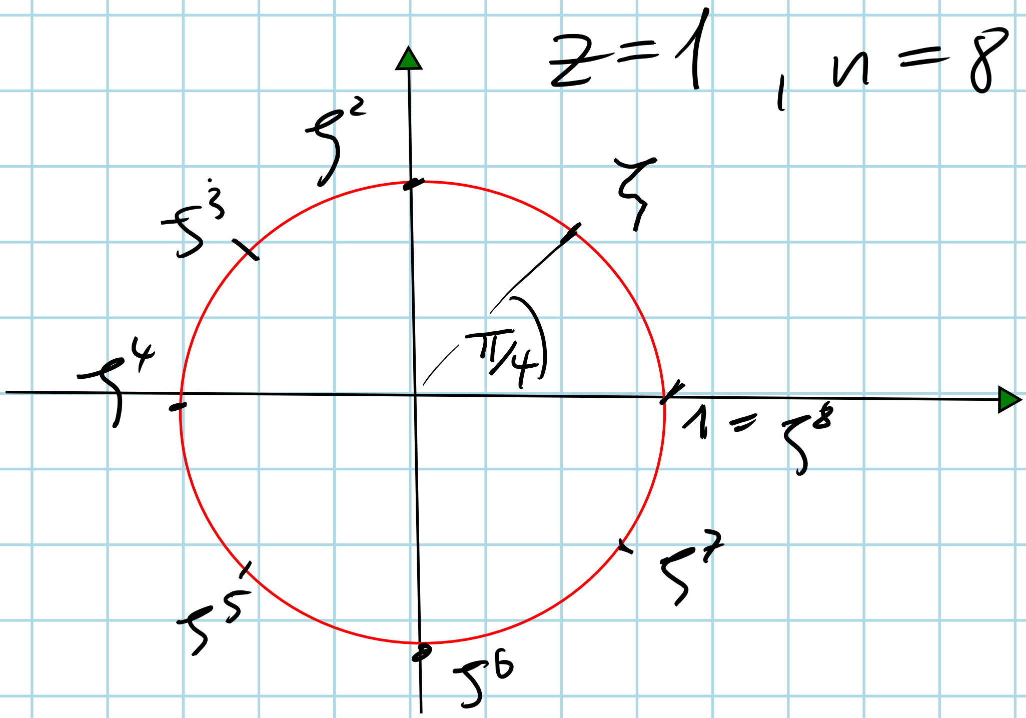
# Wurzeln

$$w^n = \underbrace{w \cdot \ldots \cdot w}_{n\text{-mal}} = z$$

## Beispiel

$z = 1, \quad n = 8$

Einheitswurzeln




$\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^8$ lösen $w^8 = 1$.

$|z|$ $\shortparallel$

Die komplexe Zahl $z$ mit Abstand $r$ und Winkel $\varphi$ hat genau $n$ verschiedene $n$-te Wurzeln. Diese haben alle den Abstand $\sqrt[n]{r}$ und die Winkel $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

denn:

$$z = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sqrt[n]{|z|} \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In $\mathbb{C}$ sind quadratische, kubische, und sogar Gleichungen beliebiger Ordnung stets lösbar!

Beispiel

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + 13 = 0$$

$$(x+2)^2 = -9 \quad \text{(negativ)}$$

$$x+2 = \pm\sqrt{-9} = \pm 3 \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}$$

$$x = -2 \pm 3 \cdot i$$

# 2. Lineare Algebra

## 2.1 Matrizen

$m \times n$ Matrix $\in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{m \cdot n}$ (oder $\mathbb{C}^{m \cdot n}$)

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\}}_{n\text{-Spalten}} \text{ m Zeilen}.$$

Koeffizient $a_{ij}$

$A = (a_{11}, \dots, a_n)$ Zeilenmatrix, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ Spaltenmatrix

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.}$$

wie bei Vektoren

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$A + 0 = A$$
$$A - A = 0$$
$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$
$$1A = A$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

$1 \in \mathbb{R}$

Nullmatrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Warum überhaupt Matrizen?

- Zahlen kommen so angeordnet aus einer Anwendung
- Multiplikation kann man sich besser merken

# Die Matrixmultiplikation

Das Produkt $AB$ ist nur definiert, wenn die Spaltenzahl von $A$ gleich der Zeilenzahl von $B$ ist. Die Zeilen- bzw. Spaltenzahl des Produktes $AB$ ist gleich der Zeilenzahl von $A$ bzw. der Spaltenzahl von $B$.
Das Matrixprodukt ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. es gibt Matrizen $A$ und $B$ mit

$$AB \neq BA.$$

<u>Beispiel</u>

$$\underbrace{(1,7,3)}_{1\times 3 \text{ Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}}_{3\times 1 \text{ Matrix}} = 1\cdot 0 + 7\cdot 1 + 3\cdot 3 = 16$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix}4 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}}_{3\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix}4 & 23 & 0 & 7\\ 10 & 33 & 1 & 12\end{pmatrix}}_{2\times 4}$$

allgemein

$$\begin{pmatrix}\vec{z}_1\\ \vdots\\ \vec{z}_m\end{pmatrix} \cdot (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) = \begin{pmatrix}\vec{z}_1 \vec{s}_1 & \dots & \vec{z}_1 \vec{s}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{z}_m \cdot \vec{s}_1 & \dots & \vec{z}_m \cdot \vec{s}_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1\ell}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1\ell}\\ \vdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{m\ell}\end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{n\ell} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell}$$

$$
\begin{aligned}
(A_1 + A_2)B &= (A_1 B) + (A_2 B),\\
A(B_1 + B_2) &= (AB_1) + (AB_2),\\
\alpha(AB) &= (\alpha A)B\\
&= A(\alpha B),\\
A(BC) &= (AB)C,\\
I_k A &= A I_\ell.
\end{aligned}
$$

Einheitsmatrix $I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot (B + C) = (a_{ij}) \left( (b_{jk}) + (c_{jk}) \right)$$

$$= (a_{ij}) \left( b_{jk} + c_{jk} \right)$$

$$= \left( \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})) \right)$$

$$= \left( \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} b_{jk}) + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} c_{jn}) \right)$$

$$= AB + AC$$

# Die transponierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

spiegeln

(2×3)-Matrix (3×2)-Matrix

vertausche Zeilen / Spalten

$$\boxed{\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T, \\ (\alpha A)^T &= \alpha(A^T), \\ (A^T)^T &= A, \end{aligned}}$$

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T.}$$

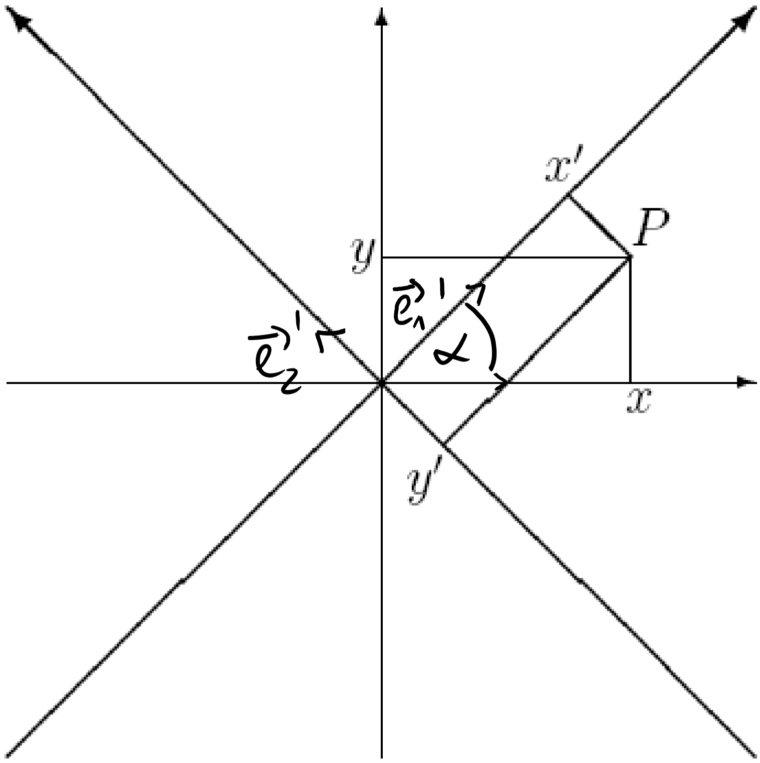
A heißt <u>symmetrisch</u>, falls $A = A^T$

A heißt <u>schiefsymmetrisch</u>, falls $A = -A^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch schiefsymm

# Beispiel: Koordinatentransformation




gegeben $x', y'$, was ist dann $(x, y)$?

| | |
|---|---|
| $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$ | $x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha$ |
| $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$ | $y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$ |
| $P$ im ursprünglichen System | $P$ im gedrehten System |

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{neu} = x' \vec{e}_1{}' + y' \vec{e}_2{}' = x' \left( \cos(\alpha) \vec{e}_1 + \sin(\alpha) \vec{e}_2 \right)$$

$$+ y' \left( -\sin(\alpha) \vec{e}_1 + \cos(\alpha) \vec{e}_2 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha) \\ x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) \end{pmatrix}_{alt} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{alt}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{A \text{ Drehmatrix um } \alpha} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{alt}$$

$$A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A^{-1}$ ist die Drehmatrix zu $-\alpha$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

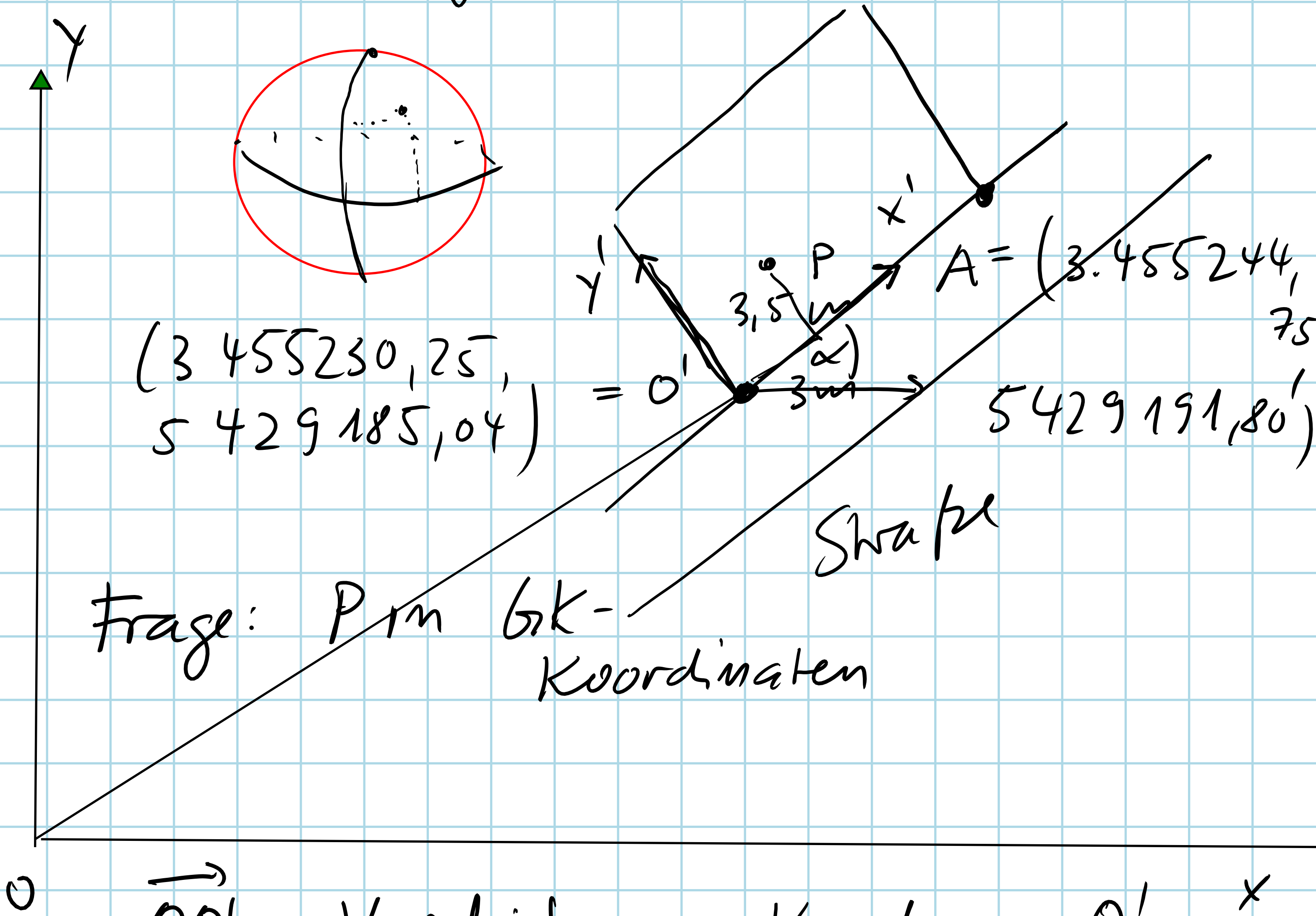
$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

<u>Bemerke:</u> $\underset{\text{Verknüpfung von Abb}}{A \circ B} = \underset{\text{Matrixmult.}}{A \cdot B}$

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \cdot \\ \sin(\alpha+\beta) & \cdot \end{pmatrix}$$

# Beispiel   Gauß-Krüger Koordinaten




Frage: P in GK-Koordinaten

$\overrightarrow{OO'}$ = Verschiebung = Koord. von O'

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overrightarrow{O'A}}{|\overrightarrow{O'A}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14{,}5\\6{,}76\end{pmatrix}}{\sqrt{14{,}5^2+6{,}76^2}}$$

$$= 0{,}906 \quad , \quad \alpha = 25^\circ$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \overrightarrow{OO'} + \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3{,}5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\,455231{,}49\\5429187{,}48\end{pmatrix}$$

# Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

im Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$