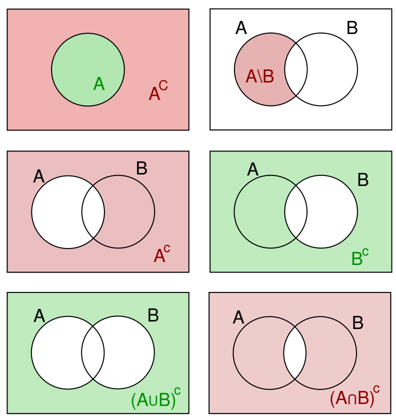
Dr. J. Härterich
Ruhr-Universität Bochum
Vorkurs Mathematik
September 2010

Lösungen zum 1. Übungsblatt

Aufgabe S1:
Sei M eine „große“ Menge mit zwei „kleineren“ Teilmengen A und B.
Das **Komplement** A^C von A ist definiert als $A^C = M \setminus A$.
Machen Sie sich die folgenden vier „Rechenregeln für Komplemente“ durch Skizzen klar und beweisen Sie zwei davon.

(i) $(A^C)^C = A$ (ii) $A \setminus B = A \cap B^C$
(iii) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (iv) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Lösung: Mit Hilfe der folgenden Bilder kann man sich die Identitäten anschaulich klarmachen:



(i) Wir zeigen, dass ein Element x genau dann in A liegt, wenn es in $(A^C)^C$ liegt.
1. Fall: $x \in A$
Nach Definition des Komplements gilt $x \in A \Rightarrow x \notin A^C \Rightarrow x \in (A^C)^C$.
2. Fall: $x \notin A$
Ebenfalls nach der Definition des Komplements gilt $x \notin A \Rightarrow x \in A^C \Rightarrow x \notin (A^C)^C$.

(ii) 1. Fall: $x \notin A$
Dann ist $x \notin A \setminus B$ und $x \notin A \cap B^C$, da beides Teilmengen von A sind.
2. Fall: $x \in A$ und $x \notin B$
Dann ist $x \in A \setminus B$ und $x \in B^C$, also auch $x \in A \cap B^C$
3. Fall: $x \in A$ und $x \in B$
Dann ist $x \notin A \setminus B$ und $x \notin B^C$, also auch $x \notin A \cap B^C$

(iii) $x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B$, d.h. x gehört weder zu A noch zu B, also gehört x zu den beiden Komplementen A^C und B^C und damit auch zu $A^C \cap B^C$

(iv) $x \in (A \cap B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cap B$, d.h. x gehört nicht zu A oder nicht zu $B \Leftrightarrow x \in A^C \cup B^C$

Aufgabe S2:
Vereinfachen Sie die Ausdrücke

(a) $\dfrac{1}{a^2}\left(b-\dfrac{b^2}{a+b}\right)$ (b) $\left(\dfrac{c}{d}-\dfrac{d}{c}\right)\dfrac{1}{c-d}$ (c) $\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$

Lösung: Es ist

(a) $\dfrac{1}{a^2}\left(b-\dfrac{b^2}{a+b}\right)=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{ab+b^2-b^2}{a+b}=\dfrac{b}{a(a+b)}$

(b) $\left(\dfrac{c}{d}-\dfrac{d}{c}\right)\dfrac{1}{c-d}=\left(\dfrac{c^2}{cd}-\dfrac{d^2}{cd}\right)\dfrac{1}{c-d}=\dfrac{(c+d)(c-d)}{cd}\dfrac{1}{c-d}=\dfrac{c+d}{cd}$

(a) $\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\dfrac{x^2-y^2}{\dfrac{y+x}{xy}}=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x+y}=xy(x-y)$

Aufgabe S3:
Zeigen Sie mit Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2+7+12+17+\ldots+(5n-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$$

Schreiben Sie außerdem die Summe auf der linken Seite mit Hilfe eines Summenzeichens.

Lösung:
Die Summe lässt sich kurz in der Form $\sum\limits_{k=1}^{n}(5k-3)$ schreiben, zu zeigen ist also

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)=\frac{n(5n-1)}{2}.$$

Induktionsanfang ($n=1$): Setzt man $n=1$, dann läuft die Summe von $k=1$ bis $k=1$, enthält also nur einen Term. Damit ist

$$\sum_{k=1}^{1}(5k-3)=2=\frac{1(5\cdot 1-1}{2}.$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1}(5k-3)=\frac{(n+1)(5(n+1)-1)}{2}=\frac{(n+1)(5n+4)}{2}$$

ist, und dürfen dabei als Induktionsvoraussetzung $\sum\limits_{k=1}^{n}(5k-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$ verwenden.

Ähnlich wie bei Aufgabe T4 ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(5k-3) &= \sum_{k=1}^{n}(5k-3) \quad + (5(n+1)-3) \\
&= \frac{n(5n-1)}{2} + (5(n+1)-3) \\
&= \frac{5n^2-n}{2} + \frac{(10n+4)}{2} \\
&= \frac{5n^2-9n+4}{2} = \frac{(n+1)(5n+4)}{2}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Summenformel auch für die Zahl $n+1$ gezeigt und gilt nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion für *alle* $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe S4: Binomialkoeffizienten

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Lotto „6 aus 49“ am nächsten Samstag alle gezogenen Zahlen größer als 12 sind?
(*Damit gehen alle Tipper leer aus, die ein Datum zur Wahl ihrer Zahlen benutzt haben...*)

(ii) Was ist beim Lotto „6 aus 49“ wahrscheinlicher: dass 4 gerade und zwei ungerade oder dass genau 4 ungerade und zwei gerade Zahlen gezogen werden ?

Lösung:

(i) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit wieder als

$$p = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}},$$

wobei die Zahl der möglichen Fälle $\binom{49}{6} = 13\ 983\ 816$ bereits in der Vorlesung berechnet wurde. Da es unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 49$ genau 37 Zahlen gibt, die größer als 12 sind, kann man auf

$$\binom{37}{6} = \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 2\,324\,784$$

Arten 6 Zahlen aus diesen 37 auswählen. Die Wahrscheinlichkeit, dass am nächsten Samstag alle gezogenen Zahlen größer als 12 sind, beträgt daher

$$p_1 = \frac{2\,324\,784}{13\ 983\ 816} \approx 16.6\%$$

(ii) Es gibt $\binom{24}{4}$ Möglichkeiten vier gerade Zahlen aus $\{2, 4, 6, \ldots, 28\}$ und $\binom{25}{2}$ Möglichkeiten zwei ungerade Zahlen aus $\{1, 3, 5, \ldots, 49\}$ auszuwählen. Da beide Wahlmöglichkeiten unabhängig voneinander bestehen, hat man

$$\binom{24}{4} \cdot \binom{25}{2} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1} = 3\ 187\ 800$$

Möglichkeiten vier gerade Zahlen und zwei ungerade Zahlen auszuwählen. Die Wahrscheinlichkeit, dass vier gerade und zwei ungerade Zahlen gezogen werden beträgt daher

$$p_2 = \frac{3\,187\,800}{13\,983\,816} \approx 22.8\%$$

Analog gibt es $\binom{24}{2}$ Möglichkeiten zwei gerade Zahlen aus $\{2, 4, 6, \ldots, 28\}$ und $\binom{25}{4}$ Möglichkeiten vier ungerade Zahlen aus $\{1, 3, 5, \ldots, 49\}$ auszuwählen. Insgesamt hat man für zwei gerade und vier ungerade Zahlen also

$$\binom{24}{2} \cdot \binom{25}{4} = \frac{24 \cdot 23}{2 \cdot 1} \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,491\,400$$

Wahlmöglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass vier gerade und zwei ungerade Zahlen gezogen werden beträgt daher

$$p_2 = \frac{3\,491\,400}{13\,983\,816} \approx 25.0\%$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also im zweiten Fall größer.

Aufgabe S5: Rechnen mit Beträgen

(a) Für welche reellen Zahlen x ist die Ungleichung

$$|x+3| + |x+4| \leq 9$$

erfüllt?

(b) Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x-1| - |x+3| \quad \text{und} \quad g(x) = \big|\, |x^2-1| - 3 \,\big| .$$

Lösung:

(a) Fallunterscheidung:

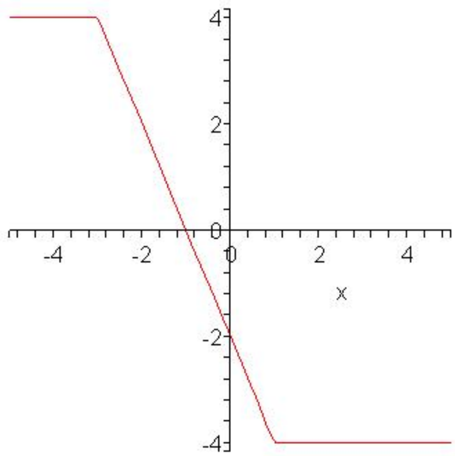
1. Fall: $x < -4$, also $|x+3| = -x-3$ und $|x+4| = -x-4$
Löse $-x-3-x-4 \leq 9 \Leftrightarrow -2x \leq 16 \;\Leftrightarrow\; x \geq -8 \rightsquigarrow$ Intervall $-8 \leq x < -4$ gehört zur Lösungsmenge

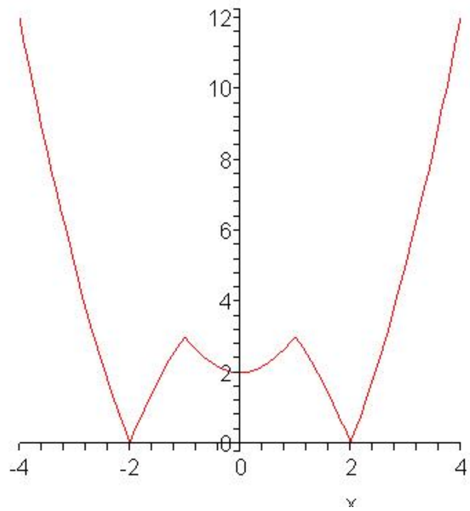
2. Fall: $-4 \leq x < -3$, also $|x+4| = x+4$ und $|x+3| = -x-3$
Löse $x+4-x-3 \leq 9$. Dies ist immer erfüllt, also gehört auch das Intervall $-4 \leq x < -3$ zur Lösungsmenge

3. Fall: $x \geq -3$, also $|x+4| = x+4$ und $|x+3| = x+3$
Löse $x+4+x+3 \leq 9 \;\Leftrightarrow\; 2x \leq 2 \;\Leftrightarrow x \leq 1$
In diesem Fall gehört das Intervall $-3 \leq x \leq 1$ zur Lösungsmenge.

Insgesamt ist die Lösungsmenge also $L = \{x \in \mathbb{R}; -8 \leq x \leq 1\}$.

(b)





Aufgabe S6: Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil, den Betrag und die komplex konjugierte Zahl zu

(a) $(2+5i)+(1-3i)(2-2i)$, (b) $\sum\limits_{k=2009}^{2011} i^k$, (c) $\dfrac{1+\frac{1}{i}}{1-\frac{1}{2i}}$ und (d) $(1-2i)^4$.

Lösung:

(a) $(2+5i)+(1-3i)(2-2i) = -2-3i$, d.h. Realteil $=-2$, Imaginärteil $=-3$, Betrag $=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ und komplex konjugierte Zahl $=-2+3i$

(b) Es ist $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$,...
Also ist $i^{2008}=(i^4)^{502}=1^{502}=1$, $i^{2009}=i\cdot i^{2008}=i$, $i^{2010}=\frac{i^{2008}}{i^2}=-1$ und $i^{2011}=\frac{i^{2008}}{i^3}=-i$.
Insgesamt ist daher

$$\sum_{k=2009}^{2011} i^k = i^{2009}+i^{2010}+i^{2011} = i-1-i=-1.$$

Realteil $=0$, Imaginärteil $=1$, Betrag $=\sqrt{1^2+0^2}=1$ und komplex konjugierte Zahl $=-i$

(c) $$\frac{1+\frac{1}{i}}{1-\frac{1}{2i}} = \frac{\frac{i+1}{i}}{\frac{2i-1}{2i}} = \frac{2+2i}{2i-1} = \frac{(2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-2-6i}{5}$$
Realteil $=-\frac{2}{5}$, Imaginärteil $=-\frac{6}{5}$, Betrag $=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ und komplex konjugierte Zahl $=\dfrac{-2+6i}{5}$

(d) Mit Hilfe des Binomischen Satzes berechnet man

$$\begin{aligned}(1-2i)^4 &= 1^4-\binom{4}{1}1^3\cdot(2i)+\binom{4}{2}1^2\cdot(2i)^2-\binom{4}{3}1^1\cdot(2i)^3+\binom{4}{4}1^0\cdot(2i)^4\\ &= 1-4\cdot 2i+6\cdot 4i^2-4\cdot(-8i)+16\\ &= -7+24i\end{aligned}$$

Realteil $=-7$, Imaginärteil $=24$, Betrag $=25$ und komplex konjugierte Zahl $=-7-24i$

Aufgabe S7: Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $\{z \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Re}\, z| \leq \mathrm{Im}\, z\}$,

(ii) $\{z \in \mathbb{C};\ \left|\frac{z-2i}{z+i}\right| \leq 1\}$ (geometrisch interpretieren!),

(iii) $\{z \in \mathbb{C};\ |z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| \leq 6\}$

Lösung:

(i) Die gesuchte Menge ist ein Kegel um die positive reelle Achse mit Begrenzungslinien $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$ und $\mathrm{Re}\, z = -\mathrm{Im}\, z$. Man kann hier beispielsweise die Fälle $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ und $\mathrm{Im}\, z < 0$ unterscheiden und erhält dann für $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ die Ungleichung

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq \mathrm{Im}\, z \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\, z \geq |\mathrm{Re}\, z|$$

während für $\mathrm{Im}\, z < 0$ die Ungleichung nie erfüllt sein kann.

(ii) sind die Punkte mit $|z-2i| \leq |z+i|$, deren Abstand zum Punkt $2i$ kleiner oder gleich ist dem Abstand zum Punkt $-i$, d.h. die Punkte mit $\mathrm{Im}\, z \geq \frac{1}{2}$. Geometrisch erhält man diese Halbebene, indem man die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zwischen $2i$ und $-i$ einzeichnet, rechnerisch ergibt sich für $z = x + iy$

$$\begin{aligned} |x+iy-2i|^2 &\leq |x+iy+i|^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 &\leq x^2 + (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow -4y + 4 &\leq 2y + 1 \\ \Leftrightarrow 3 &\leq 6y \end{aligned}$$

(iii) $|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| \leq 6$ bedeutet wegen

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ und } \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

dass $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq 3$ gelten muss. Durch diese Ungleichung wird das das abgeschlossene Quadrat mit Ecken 3, $3i$, -3 und $-3i$ beschrieben.