Mathematischer Vorkurs
für Studierende der Informatik,
der Natur- und Ingenieurwissenschaften

Dr. Jörg Härterich

Ruhr-Universität Bochum

6.-30.September 2010

Willkommen !

Dozent: Dr. Jörg Härterich
Gebäude NA 4/30
joerg.haerterich@rub.de

Sprechstunde: Nach der Vorlesung

Vorlesung: täglich, 11.15-13 Uhr (mit Pause), HZO 10

Übungsgruppen: Immer mittwochs und freitags
von 9-11 Uhr, bzw. von 14-16 Uhr
in "kleinen" Gruppen
bei erfahrenen Studierenden
Wichtig !

Unser Programm

1. **Mengen und Zahlen**
   Natürliche, reelle und komplexe Zahlen
   Fakultät, Binomialkoeffizienten und Kombinatorik
2. **Wurzeln, Potenzen und Logarithmen**
   Rechenregeln und Lösen von Gleichungen
3. **Elementare Funktionen**
   Polynome, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen
4. **Differentialrechnung**
   Grenzwerte, Ableitung, Integration
5. **Vektorrechnung**
   Geraden, Ebenen, analytische Geometrie

Fragestellungen

Mathematik führt uns durch Fragen

- Ist die Großpackung Müsli wirklich billiger?
- Welcher Handytarif ist für meine Angewohnheiten am günstigsten?
- Wie viel sind 80° Fahrenheit?

oft auf **Gleichungen** oder

- Welche Veranstaltungen in welchem Semester belegen?
- In welcher Reihenfolge hole ich drei Freunde ab?
- Wieviel Geld muss Schalke ausgeben, um endlich Meister zu werden?

auf **Optimierungsprobleme**.

Lösungen und Strategien

Hier geht es darum

- Rechenfertigkeiten zu üben (Bruchrechnen, binomische Formeln, Potenzgesetze,...)
- Standard-Lösungsmethoden zu wiederholen (quadratische Gleichungen, Extremwertaufgaben,...)
- Problemlösestrategien kennenzulernen (Fallunterscheidung, Vollständige Induktion,...)
- über mathematische Modellierung zu diskutieren
- ...
- und vielleicht hier und da noch etwas Neues kennenzulernen.

Die ABC-Diät

Aufgabe: Stelle eine passende Diät zusammen!

Der Nährwert (je 100 Gramm):

	Aal	Banane	Champignons
Kalorien	300	100	25
Protein	16	2	3
Kohlehydrate	1	21	2

Ziel: 1200 Kalorien, 60g Protein und 90g Kohlenhydrate je Tag

1. Lösungsansatz: Trial and Error

Kaufe am ersten Tag 200 g Aal und 500 g Bananen
Kalorien: $2 \cdot 300 + 5 \cdot 100 = 1100$
Noch 100 Kalorien für die Pilze $\leadsto$ kaufe 400g Champignons
Proteine: 54 g $\leadsto$ zu wenig
Kohlenhydrate: 115 g $\leadsto$ zu viel
Korrekturmöglichkeiten ?

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Die ABC-Diät

Der Nährwert (je 100 Gramm):

	Aal	Banane	Champignons
Kalorien	300	100	25
Protein	16	2	3
Kohlehydrate	1	21	2

Ziel: 1200 Kalorien, 60 g Protein und 90 g Kohlenhydrate täglich

2. Lösungsansatz (für Perfektionisten): Gleichung aufstellen

Wenn wir x g Aal, y g Bananen und z g Champignons kaufen, dann entspricht das
$300x + 100y + 25z$ Kalorien
$16x + 2y + 3z$ g Protein und
$x + 21y + 2z$ g Kohlenhydraten.
Man muss dann ein *lineares Gleichungssystem* lösen.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Warm up 2: Fussball-WM

Warum spielen in einer Fussballmannschaft gerade 11 Spieler?
(siehe M. Ludwig: Mathematik + Sport, Vieweg-Teubner Verlag)

Einfaches Modell

- Spieler brauchen Platz zum Laufen
- wenig Ballkontakte pro Minute $\leadsto$ langweiliges Spiel
- zu viele Ballkontakte pro Minute $\leadsto$ unübersichtliches Spiel

Erfahrungswerte

- 20 Ballkontakte pro Minute: attraktives Spiel
- durchschnittlich 3 Sekunden pro Ballkontakt
- Laufgeschwindigkeit $5\frac{m}{s}$
- Gegenspieler legt in 3 Sekunden $3s \cdot 5\frac{m}{s} = 15\,m$ zurück

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Warm up 2: Fussball-WM

Flächenansatz

- Spieler legen in 3 Sekunden $3s \cdot 5\frac{m}{s} = 15\,m$ zurück
- Jeder Spieler deckt einen Kreis mit Radius $r = 15$ Meter ab
- Welche Fläche hat dieser Kreis?

Ergebnis

- Fläche dieses Kreises: $A = \pi r^2 = \pi \cdot 225 m^2 \approx 707 m^2$
- Spielfeldgröße circa $70\,m \times 100\,m = 7000\,m^2$

Um die $7000\,m^2$ abzudecken, benötigt man etwa

$$7000/707 \approx 10 \text{ Feldspieler.}$$

Geogebra-Applet

Mengen

Wenn Mathematiker Objekte zusammenfassen $\rightsquigarrow$ Menge

Cantor (1885):

„Eine **Menge** ist eine wohldefinierte Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen."

Die Objekte heißen **Elemente** der Menge.

„verschiedene" Objekte: kein Element kommt mehrfach vor

Schreibweise: Großbuchstaben A, B, C,... für Mengen

Ist a in der Menge A enthalten, schreibe $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, sonst $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Beispiele für Mengen

Massenweise Mengen

1. Die Menge der Wörter in der WAZ
2. die Menge der Requisiten im Schauspielhaus
3. die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ der *natürlichen Zahlen*
4. die Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
5. die Menge $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ der Primzahlen, d.h. der Zahlen, die genau zwei Teiler besitzen.
6. die Menge aller Rechtecke in der Ebene

Die Menge, die *überhaupt kein* Element enthält, heißt **leere Menge**, geschrieben $\{\}$ oder $\emptyset$.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Schreibweise

Mengen gibt man meist auf eine der folgenden Arten an:

- Durch **Aufzählung** ihrer Elemente:

$$S = \{\text{rot}, \text{blau}, \text{grün}\}, \quad T = \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

- Durch eine **gemeinsame Eigenschaft** aller Elemente:

$$U = \{n \in \mathbb{N};\ n \ \text{ ist ungerade}\}$$

ist die Menge aller natürlichen Zahlen n für die die *Aussage* „*n ist ungerade*" eine wahre Aussage ist.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Aussagen

Eine **Aussage** ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

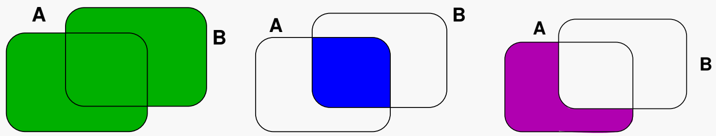
Beispiele:

- „*Japan ist ein Land in Asien*“ ist eine wahre Aussage.
- „*Zwei mal drei macht vier, widde widde witt und drei macht neune.*“ ist eine falsche Aussage.
- „*menschlich - weltoffen - leistungsstark*“ ist (mathematisch) keine Aussage (wahr?? falsch??)
- „*Die Zahl* $2^{2^{33}}+1$ *ist eine Primzahl*“ ist eine Aussage, aber im Moment weiß niemand, ob sie wahr oder falsch ist.

Konstruktion von Mengen

Aus zwei Mengen A und B lassen sich weitere Mengen konstruieren:

- Die **Vereinigung** $A \cup B$ enthält alle Elemente, die in A oder in B enthalten sind
- Der **Durchschnitt** $A \cap B$ enthält alle Elemente, die in A und in B enthalten sind
- Die **Differenz** $A \setminus B$ enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind



Beispiel: Teilbarkeit

Betrachte

$$M = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ ist teilbar durch } 2\} \text{ und}$$
$$N = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ ist teilbar durch } 3\}.$$

Die Vereinigung $M \cup N$ enthält alle natürlichen Zahlen n, für die

„*n ist teilbar durch 2*“ **oder** „*n ist teilbar durch 3*“ wahr ist

$$M \cup N = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots\}$$

Der Durchschnitt $M \cap N$ enthält alle natürlichen Zahlen n, für die

„*n ist teilbar durch 2*“ **und** „*n ist teilbar durch 3*“ wahr ist.

$$M \cap N = \{6, 12, 18, \dots\} = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ ist teilbar durch } 6\}$$

Teilmengen

Seien A und B zwei Mengen.
Dann heißt A **Teilmenge** von B, geschrieben $A \subseteq B$, falls jedes Element von A auch in B enthalten ist.
Die Aussage $\quad x \in A \Rightarrow x \in B \quad$ ist dann **wahr**.

Gleichheit von Mengen

Definition: Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Nachweis von Gleichheit

Statt elementweise nachprüfen:

$$M = N \iff M \subseteq N \ \textbf{und}\ N \subseteq M.$$

Einfache Rechenregeln für Mengen

Aus der Definition ist klar, dass für zwei Mengen A und B gilt:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetze)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetze)

Außerdem:

De Morgansche Regeln (siehe Übungen!)

- $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
- $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

Beispiel: Distributivgesetz

Seien A, B und C drei Mengen. Wir wollen zeigen, dass die Gleichheit

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

immer richtig ist.

1. Schritt: $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Falls $x \in (A \cap B) \cup C$, dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $x \in A \cap B$, das heißt $x \in A$ und $x \in B$
   Dann ist $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$ (größere Menge), also auch in $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
2. $x \in C$
   Dann ist $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$ (größere Menge), also auch in $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Beispiel: Distributivgesetz

Seien A, B und C drei Mengen. Wir wollen zeigen, dass die Gleichheit

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

immer richtig ist.

2. Schritt: $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

Ist ein Element $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, dann ist $x \in A \cup C$.
Falls $x \in C$ ist, dann auch in der größeren Menge $(A \cap B) \cup C$ und wir sind fertig.
Falls $x \notin C$, aber $x \in A \cup C$, dann muss $x \in A$ sein.
Außerdem muss x auch Element von B sein, denn $x \in B \cup C$.
Dann liegt $x \in A \cap B$, also auch in der größeren Menge $(A \cap B) \cup C$.

Natürliche Zahlen

Nützliche Eigenschaft

- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl
- jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger

Eine Summe

- $1 = 1^2$
- $1 + 3 = 2^2$
- $1 + 3 + 5 = 3^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
- **Vermutung:** $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Problem: Für alle n nachrechnen dauert zu lang!

Vollständige Induktion

Dominoprinzip

Zeige:
Formel stimmt für ein n (zum Beispiel für $n = 26$)
$\Rightarrow$ die Formel stimmt auch für $n + 1$ (also für $n = 27$).

Argumentation:

Weil sie für $n = 1$ stimmt, stimmt sie auch für $n = 2$.
Weil sie für $n = 2$ stimmt, stimmt sie auch für $n = 3$.
Weil sie für $n = 3$ stimmt, stimmt sie auch für $n = 4$.
Undsoweiterundsofort...

Konsequenz:

Die Formel stimmt für **alle** natürlichen Zahlen n.

Die Summe ungerader Zahlen

Zeige $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ mit Vollständiger Induktion

1. Schritt: Induktionsanfang bei $n = 1$

$1 = 1^2$ (das hatten wir ja schon nachgerechnet)

2. Schritt: Induktionsschritt von n nach $n + 1$

Wenn $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, dann ist

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) &= \\ \underbrace{(1 + 3 + \ldots + (2n-1))}_{=n^2} + (2n+1) &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Die Formel stimmt also auch für $n + 1$.

Konsequenz:
Die Formel stimmt für **alle** natürlichen Zahlen n.

Vollständige Induktion

Das Ganze noch einmal etwas abstrakter.
Ziel: Zeigen, dass eine bestimmte Aussage für alle natürlichen Zahlen n wahr ist.

1. Schritt: Induktionsanfang

Zeige: Die Aussage ist zumindest für die Zahl $n = 1$ wahr.

2. Schritt: Induktionsschritt

Zeige:
Wenn die Aussage für eine beliebige Zahl n wahr ist, dann ist sie auch für die Zahl $n + 1$ wahr.

Dann ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n wahr, denn:
Weil sie für $n = 1$ wahr ist, ist sie auch für $n = 2$ wahr.
Weil sie für $n = 2$ wahr ist, ist sie auch für $n = 3$ wahr.
Weil sie für $n = 3$ wahr ist, ist sie auch für $n = 4$ wahr...

Vollständige Induktion: Winkelsumme im n-Eck

Behauptung: Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen $(n + 2)$-Ecks ist $n \cdot 180°$.
Zum Beispiel $n = 9$**:** Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen 11-Ecks ist $9 \cdot 180°$.

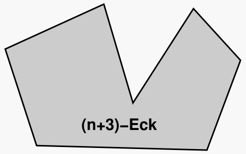
1. Schritt: Induktionsanfang

Zeige: Die Aussage ist zumindest für die Zahl $n = 1$, wahr,d.h. für Dreiecke ist die Winkelsumme $180°$. (Bekannt?!)

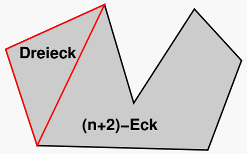
2. Schritt: Induktionsschritt

Zeige:
Wenn die Winkelsumme in jedem $(n + 2)$-Eck $\mathbf{n \cdot 180°}$ ist, dann ist die Winkelsumme in jedem $(n + 3)$-Eck $\mathbf{(n + 1) \cdot 180°}$.

Winkelsumme im $(n+3)$-Eck



Idee: Ecke abschneiden



$\Rightarrow$ ergibt $(n+2)$-Eck und Dreieck

$$\begin{aligned} & \text{Winkelsumme } (n+3)\text{-Eck} \\ = \; & \text{Winkelsumme (Dreieck)} + \text{Winkelsumme } ((n+2)\text{-Eck}) \\ = \; & 180^\circ + n \cdot 180^\circ = (n+1) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Potenzen

Vor den beiden letzten Beispielen zur Vollständigen Induktion, sei noch mal an das Rechnen mit Potenzen erinnert:
So ähnlich wie bei

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n-\text{mal}} = a \cdot n$$

setzt man

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}} = a^n$$

und nennt a^n die n-te **Potenz** von a.

Die Zahl n heißt **Exponent**, die Zahl a **Basis**.

Vereinbarung: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Rechenregeln für Potenzen

Durch Abzählen sieht man direkt die **Potenzgesetze**

$$\begin{aligned} a^n a^k &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-\text{mal}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k-\text{mal}} = a^{n+k} \\ (a^n)^k &= \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-\text{mal}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-\text{mal}} \ldots \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-\text{mal}}}_{k-\text{mal}} = a^{nk} \\ a^n b^n &= \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-\text{mal}} \underbrace{(b \cdot \ldots \cdot b)}_{n-\text{mal}} = \underbrace{(ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n-\text{mal}} = (ab)^n \end{aligned}$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Die Bernoullische Ungleichung

Die Behauptung:

Für jede Zahl $h > -1$, $h \neq 0$ und jede natürliche Zahl n gilt die Ungleichung

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Das beweisen wir nun mittels Vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang (n=1):

Für $n = 1$ herrscht offenbar Gleichheit.

Induktionsschritt (n $\rightarrow$ n+1):

Induktionsvoraussetzung: Ungleichung sei für n wahr.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+h)^{n+1} &= (1+h) \cdot (1+h)^n \\ &\geq (1+h)(1+nh) \quad \leftarrow \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 > 1 + (n+1)h. \end{aligned}$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Beispiel: Teilbarkeit

Behauptung

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $3^k - 3$ durch 6 teilbar.

Benutze wieder Vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $k = 2$

$3^2 - 3 = 6$ ist teilbar durch 6.

Induktionsschritt

Annahme: Wir wissen schon, dass $3^k - 3$ durch 6 teilbar ist.
Dann ist

$$3^{k+1} - 3 = 3 \cdot 3^k - 3 = 2 \cdot 3^k + 3^k - 3 = \underbrace{2 \cdot 3}_{=6} \cdot 3^{k-1} + \underbrace{3^k - 3}_{\text{teilbar durch 6}}$$

ebenfalls teilbar durch 6.

Abzählprobleme 1

Abwechslung I

Herr Rupp besitzt

3 Anzüge, 7 Hemden und 11 Krawatten.

Er möchte seine Kleidungsstücke jeden Tag auf eine neue Art miteinander kombinieren. Wieviele Tage kann er das?

Mögliche Kombinationen:
Jede Krawatte lässt sich mit jedem Hemd kombinieren
$\Rightarrow 11 \cdot 7 = 77$ Krawatte-Hemd-Kombinationen
Jede Krawatte-Hemd-Kombination geht mit jedem Anzug
$\Rightarrow 77 \cdot 3 = 231$ Krawatte-Hemd-Anzug-Kombinationen

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Abzählprobleme 2

Problem 1: Hemden

Wie wir wissen, besitzt Herr Rupp 7 Hemden.
Er möchte an jedem Wochentag ein anderes Hemd anziehen, bevor er am Sonntagabend alle wäscht.
Auf wieviele verschiedene Arten kann er das tun?

Ziehen ohne Zurücklegen = Dreckiges Hemd nicht zurück in den Schrank!

Am Montag: Volle Auswahl $\rightsquigarrow$ 7 Möglichkeiten
Am Dienstag: noch 6 Hemden übrig $\rightsquigarrow$ 6 Möglichkeiten
Am Mittwoch: noch 5 Hemden übrig $\rightsquigarrow$ 5 Möglichkeiten
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
Am Samstag: noch 2 Hemden übrig $\rightsquigarrow$ 2 Möglichkeiten
Am Sonntag: keine Auswahl mehr!

Insgesamt: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ **Möglichkeiten**

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Permutationen

Andere Sichtweise

Zähle die Anzahl der Möglichkeiten, die sieben Hemden anzuordnen.

Allgemein

Anzahl Möglichkeiten, n Objekte in eine Reihenfolge zu bringen
Anzahl Möglichkeiten, die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ anzuordnen

Behauptung

Es gibt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad (\text{„n Fakultät"})$$

Möglichkeiten.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

1. Begründung

Behauptung

Es gibt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad (\text{„}n\text{ Fakultät“})$$

Möglichkeiten, die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ anzuordnen.

Begründung

n Möglichkeiten, die erste Zahl auszuwählen
n − 1 Möglichkeiten, die zweite Zahl auszuwählen
n − 2 Möglichkeiten, die dritte Zahl auszuwählen
⋮ ⋮ ⋮
2 Möglichkeiten, die $(n-1)$-te Zahl auszuwählen
nur **1** Möglichkeit, die letzte Zahl auszuwählen
Insgesamt: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

2. Begründung: Vollständige Induktion

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Behauptung

Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen.

Induktionsanfang $n = 1$

Es gibt genau eine Möglichkeit, ein einzelnes Objekt anzuordnen.

Induktionsschritt von n nach $n+1$

Annahme: Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen.
Nun: $n+1$ Objekte $=$ $n+1$ Möglichkeiten, um das Objekt an erster Stelle zu wählen.
Bleiben: n Objekte und n Plätze (die Plätze 2 bis $n+1$).
Für diese n Objekte: $n!$ Anordnungsmöglichkeiten
$\Rightarrow$ insgesamt $(n+1) \cdot (n!) = (n+1)!$ Anordnungsmöglichkeiten

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Abzählprobleme 3

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Problem 1: Krawatten

Wie wir wissen, besitzt Herr Rupp **11 Krawatten**.
Er legt sich am Sonntagabend 7 Krawatten für die kommende Woche zurecht.
Auf wieviele verschiedene Arten kann er das tun?

Andere Formulierung

Auf wieviele Arten kann man aus 11 Krawatten 7 auswählen, ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt?

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Problem: k Objekte aus n Objekten auswählen

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Alternativ: k Zahlen aus $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ auswählen

Für die erste Zahl: **n** Möglichkeiten
Für die zweite Zahl: **n − 1** Möglichkeiten
⋮ ⋮ ⋮
Für die k-te Zahl: **n − k + 1** Möglichkeiten

Insgesamt: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten

Aber: Reihenfolge unwichtig
$\Rightarrow$ die $k!$ Permutationen der ausgewählten k Zahlen sollten nur als **eine** Möglichkeit gezählt werden.

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Binomialkoeffizienten

Verschiedene Möglichkeiten, k Zahlen aus $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ auszuwählen:

„n über k"

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

heißt **Binomialkoeffizient**.

Beispiel: „Drei aus Zehn"

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{720}{6} = 120 = \frac{10!}{(7!)\,(3!)}$$

Lotto „6 aus 49"

Verschiedene Kombinationen:

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

Wie fair?

Einsatz: 75 cent + Bearbeitungsgebühr $\approx$ 1 Euro
Gewinn: schwankend zwischen 150.000 und 3.000.000 Euro
Doch lieber ins Casino ???

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Abzählprobleme: Poker

Texas Hold'Em

- gespielt wird mit 52 Karten
- zwei eigene Handkarten
- maximal fünf offene Karten
- beste Kombination: Royal Flush = 10 bis As in einer Farbe

Spielsituation

gezogen: 10♣, König ♣
Wie hoch sind die Chancen auf einen Royal Flush?

Chancen=Wahrscheinlichkeit

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Chancen auf Royal Flush

Mögliche Fälle

Aus den restlichen 50 Karten 5 auswählen geht auf

$$\binom{50}{5} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2\,118\,760 \text{ Arten}$$

Günstige Fälle

- die drei „guten" Karten B♣, D♣, As♣ müssen dabei sein
- zwei weitere Karten aus den restlichen 47 Karten auswählen geht auf $\binom{47}{2} = \frac{47 \cdot 46}{1 \cdot 2} = 1081$ Arten

$\Rightarrow$ Selbst bei optimalen eigenen Karten stehen die Chancen auf einen Royal Flush bei

$$\frac{1081}{2\,118\,760} \approx 0{,}05\%$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Urnenmodelle

Strategie für viele Zufallsexperimente:
Übersetzung in ein Urnenmodell.

Ereignisse = Kugeln in einem Gefäß

Unterscheide:

- Kugel wird gezogen und wieder zurückgelegt
- Kugel wird gezogen und nicht wieder zurückgelegt

- Reihenfolge beim Ziehen wird berücksichtigt
- Reihenfolge ist egal

Mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Es gibt n^k Möglichkeiten k-mal aus n Kugeln eine auszuwählen.

Urnenmodelle

Ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Es gibt

$$n \cdot (n-1) \cdot n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten, aus n unterscheidbare Kugeln der Reihe nach k zu ziehen.

Speziell: $n = k$ Es gibt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Möglichkeiten, n unterscheidbare Kugeln der Reihe nach aus einer Urne zu ziehen.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Urnenmodelle

Ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Kugeln genau k auszuwählen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

$\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Urnenmodelle

Mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Es gibt $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Kugeln k-mal eine Kugel zu ziehen.
Dabei können Kugeln doppelt vorkommen.

Beispiel

Je eine rote, blaue und grüne Kugel in der Urne.
Es wird k-mal eine Kugel gezogen und zurückgelegt.
Reihenfolge spielt keine Rolle
RRGBB und RGBRB zählen als *eine* Möglichkeit

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Urnenmodelle

Begründung

- n Kugeln entsprechen Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$
- k Zahlen auswählen ohne Reihenfolge:
  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$
- Problem: gleiche Zahlen können auftreten
- Ausweg: Ersetze a_j durch $a_j + j - 1$
- neue Zahlen
  $1 \leq \underbrace{a_1}_{=b_1} < \underbrace{a_2 + 1}_{=b_2} < \underbrace{a_3 + 2}_{=b_3} < \dots < a_k + k - 1 \leq n + k - 1$
- alle b_j verschieden
- a_j lassen sich aus den b_j rekonstruieren
- Wähle also k Zahlen $b_1, \dots, b_k$ aus $\{1, 2, \dots, n + k - 1\}$ aus $\rightsquigarrow \binom{n+k-1}{k}$

Urnenmodell I: mit Zurücklegen, Reihenfolge egal

Beispiel:

Anzahl der Möglichkeiten, bei dreimaligem Würfeln eine sechs zu erzielen (Mensch ärgere Dich nicht)

Jede der Zahlen 1 bis 6 entspricht einer Kugel in der Urne „mit Zurücklegen“: mehrmals dieselbe Augenzahl möglich

Anzahl Möglichkeiten dreimal *keine* 6 zu ziehen: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
Möglichkeiten mit 6 also $216 - 125 = 91$.

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $\dfrac{91}{216} \approx 42\%$

Urnenmodell II: ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge

Beispiel

In der Übungsgruppe mit 25 Studierenden haben 10 ihre Aufgaben nicht gemacht. Der Tutor kontrolliert zufällig drei Studierende. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei ihre Aufgaben gemacht haben?

Urnenmodell: 15 weiße und 10 schwarze Kugeln

Ziehe drei Kugeln ohne zurücklegen
Gesucht: Wahrscheinlichkeit für drei weiße Kugeln.
Insgesamt $\binom{25}{3} = 2300$ Möglichkeiten
$\binom{15}{3} = 455$ nur weiße Kugeln
$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $\frac{455}{2300} \approx 20\%$

Urnenmodell III: ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge

Beispiel

Bei der Fussball-WM 2010 spielten 32 Mannschaften in 8 Vorrunden-Gruppen. In jeder Gruppe war eine Mannschaft gesetzt. Aus drei „Töpfen“ wurde jeweils eine Mannschaft zugelost.
Wieviele Möglichkeiten gab es, die Gruppen zusammenzustellen?

Urnenmodell: 8 unterscheidbare Kugeln pro Topf

Ziehe acht Kugeln ohne zurücklegen
Anzahl Möglichkeiten pro Topf: $8! = 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$
Töpfe unabhängig: Insgesamt $40.320^3 \approx 65$ Billionen Varianten

Urnenmodell IV: mit Zurücklegen, Beachtung der Reihenfolge

Beispiel:

Anzahl der Möglichkeiten, bei dreimaligem Würfeln zuerst eine gerade Zahl, dann eine durch drei teilbare Zahl und dann eine ungerade Zahl zu würfeln.

Jede der Zahlen 1 bis 6 entspricht einer Kugel in der Urne
„mit Zurücklegen“: mehrmals dieselbe Augenzahl möglich
Anzahl Möglichkeiten gerade/ungerade Zahl zu ziehen: 3
Anzahl Möglichkeiten durch drei teilbare Zahl zu ziehen: 2
Insgesamt also $3 \cdot 2 \cdot 3$ Möglichkeiten.

Kleiner Selbsttest

Welcher Typ liegt vor?

Aus dem 11-köpfigen Kader soll der Handball-Jugendtrainer eine Mannschaft (7 Spieler/innen) aufstellen.
Wieviele Möglichkeiten hat er?

- Mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
- Mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- Ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
- Ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Kleiner Selbsttest

Welcher Typ liegt vor?

Eine Gesellschaft besteht aus sechs Personen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die sechs Personen an einen Tisch zu setzen?

- Mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
- Mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- Ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
- Ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Kleiner Selbsttest

Welcher Typ liegt vor?

Wieviele Möglichkeiten gibt es, zehn (ununterscheidbare) Schokoriegel auf drei (unterscheidbare) Kinder zu verteilen?

- Mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
- Mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- Ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge
- Ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Beispiel: Binomischer Satz

Binomische Formeln

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen findet man

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \end{aligned}$$

Die zweite Formel ergibt sich übrigens aus der ersten:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

Beispiel: Binomischer Satz

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Geht das auch für höhere Potenzen?

Ausmultiplizieren!

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \end{aligned}$$

Wie oben:

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3 \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ (a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \\ (a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5 \end{aligned}$$

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Beispiel: Binomischer Satz

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Vorüberlegungen

$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\ &= a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a + a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b + a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot a + \ldots \\ &= \ldots \\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \end{aligned}$$

Beobachtung:
Nur Terme a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 und b^5 kommen vor

Frage: Wieviele von jeder Sorte?

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Beispiel: Binomischer Satz

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Antwort:

Ausmultiplizieren = aus jeder Klammer a oder b auswählen

- nur ein Term a^5, da dann in jeder Klammer „a“ gewählt wird.
- 5 Terme a^4b: das eine „b“ kann aus jeder der fünf Klammern stammen
- 10 Terme a^3b^2: die beiden „b“s kann man auf $\binom{5}{2}$ Arten aus den fünf Klammern wählen $\rightsquigarrow$ Binomialkoeffizienten
- etc.

Ergebnis:

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5$$

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Beispiel: Binomischer Satz

Theorem (Binomischer Satz)

Für jede beliebige natürliche Zahl n gilt:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Definiert man noch für jede natürliche Zahl n, dass $\binom{n}{0} = 1$ ist, dann wird daraus

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Beispiel: Schnelles Kopfrechnen

Was ist 101^5 ?

Rechnung mit Binomischem Satz

$$\begin{aligned}
101^5 &= (100+1)^5 \\
&= \binom{5}{0}100^5\cdot 1^0 + \binom{5}{1}100^4\cdot 1^1 + \binom{5}{2}100^3\cdot 1^2 \\
&\quad + \binom{5}{3}100^2\cdot 1^3 + \binom{5}{4}100^1\cdot 1^0 + \binom{5}{5}100^0\cdot 1^5 \\
&= 10\,000\,000\,000 + 5\cdot 100\,000\,000 + 10\cdot 1\,000\,000 \\
&\quad + 10\cdot 10\,000 + 5\cdot 100 + 1 \\
&= 10\,510\,100\,501
\end{aligned}$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Schreibweise: Summenzeichen

Notation ohne „...“ : Das Summenzeichen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

heißt:

- k von 0 bis n laufen lassen
- $k=0$: $\binom{n}{0}a^{n-0}b^0 = a^n$
- $k=1$: $\binom{n}{1}a^{n-1}b^1 = na^{n-1}b$
- $k=2$: $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$
- usw.
- die so erhaltenen $n+1$ Terme addieren

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Beispiele zum Summenzeichen

Beispiele

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= 1+2+3+\ldots+n \\
\sum_{k=5}^{8} k^2 &= 25+36+49+64 = 174 \\
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \\
\sum_{j=1}^{n}(2j-1) &= 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2 \\
\sum_{m=3}^{10} 2 &= 2+2+\ldots+2 = 16
\end{aligned}$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Beispiele zum Üben

Schreiben Sie die Summen aus

$$\sum_{k=2}^{n-1} k \quad =$$

$$\sum_{n=-2}^{2} 2^n \quad =$$

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{m+1} \quad =$$

Beispiele zum Summenzeichen

Nun umgekehrt:

Schreibe mit Hilfe des Summenzeichens

$$1+3+5+\ldots+101 \quad =$$

$$-1+2-3+4-5+6-+\ldots+2010 \quad =$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{100} \quad =$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Zwei Eigenschaften von Binomialkoeffizienten

Es gilt:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Begründung:

1. k Zahlen aus n auswählen $=$ $n-k$ **nicht** auswählen.
2. k Zahlen aus $n+1$ auswählen:
   - **1** auswählen und **k** $-$ **1** aus den restlichen **n**
   - **1** nicht auswählen und **k** aus den restlichen **n**

Beispiele:

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 20$$

$$\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40\cdot 39}{1\cdot 2} = 780$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Pascalsches Dreieck

Berechnung von Binomialkoeffizienten: Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Die Gleichung $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ bedeutet:
Jeder Binomialkoeffizient ist die Summe der beiden über ihm stehenden.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Pascalsches Dreieck

Rechenschema:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Pascalsches Dreieck

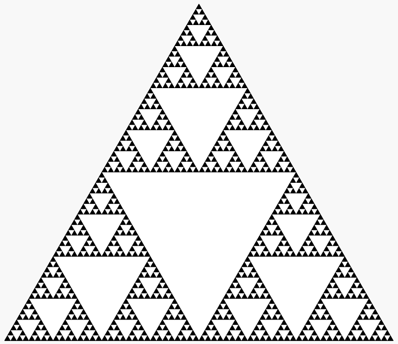
Ein paar Zeilen mehr:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad 1
\end{array}
$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Spielerei am Computer

Gerade Zahlen im Pascalschen Dreieck $\rightsquigarrow$ weiß
Ungerade Zahlen im Pascalschen Dreieck $\rightsquigarrow$ schwarz



„Selbstähnlichkeit“

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Lineare Gleichungen

Bruchrechnung

Bruchzahlen helfen, **alle** Gleichungen

$$x \cdot a = b$$

mit natürlichen oder ganzen Zahlen a und b zu lösen:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Rationale Zahlen (Bruchzahlen)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Typischerweise: p und q *teilerfremd* ($=$ Bruch gekürzt)

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Regeln beim Bruchrechnen

Addition von Brüchen: Hauptnenner!

$$\frac{4}{15}+\frac{5}{21}=\frac{4\cdot 7+5\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{53}{105}$$

Multiplikation: $\dfrac{\textbf{Zähler}\cdot\textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner}\cdot\textbf{Nenner}}$

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 5}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$$

Division von Brüchen: Multiplikation mit Kehrwert!

$$\frac{3}{7}\div\frac{6}{5}=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{14}$$

Salzsäure

Beispiel: Mischung

Im Chemielabor findet Herr Rupp eine Flasche verdünnter Salzsäure ($\frac{3}{4}\ell$ mit 10 Volumenprozent) und eine Flasche konzentrierte Salzsäure ($\frac{1}{2}\ell$ mit 30 Volumenprozent).
Welche Konzentration ergibt sich, wenn er beide Flaschen mischt?
Ansatz:

$$\begin{aligned}
\text{Konzentration} &= \frac{\text{Salzsäuremenge gesamt}}{\text{Flüssigkeitsmenge gesamt}}\\
\text{Gesamtmenge} &= \frac{3}{4}\ell+\frac{1}{2}\ell=\frac{5}{4}\ell\\
\text{Salzsäuremenge} &= \frac{10}{100}\cdot\frac{3}{4}\ell+\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}\ell=\frac{3}{40}\ell+\frac{3}{20}\ell=\frac{9}{40}\ell\\
\text{Konzentration} &= \frac{\frac{9}{40}\ell}{\frac{5}{4}\ell}=\frac{36}{200}=18\%
\end{aligned}$$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln
Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Das Ganze mit Buchstaben

Beispiel 1

$$\begin{aligned}
\frac{2(x-1)}{x+1}+\frac{x+1}{x-1} &= \frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}+\frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p-1}{p}}=\frac{1}{p}+\frac{p}{p-1}\\
&= \frac{p-1}{p(p-1)}+\frac{p^2}{p(p-1)}=\frac{p^2+p-1}{p(p-1)}
\end{aligned}$$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln
Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Doppelbrüche

Statt durch einen Bruch zu teilen, multipliziert man mit seinem Kehrwert.

Beispiel 1

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2^4}{3^7}}{\frac{2^5}{3^2}} &= \frac{2^4}{3^7}\cdot\frac{3^2}{2^5}\\
&= \frac{1}{2\cdot 3^5}
\end{aligned}$$

Kurzversion:

- Der Nenner des Zählers wandert in den Nenner
- Der Nenner des Nenners wandert in den Zähler

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln
Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Negative Potenzen

RUB

Damit das Potenzgesetz

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0$$

auch für den Exponenten 0 gilt, setzt man $a^0 = 1$ für jedes a.

Ganzzahlige Exponenten

Damit

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

für alle n gilt, setzt man

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Die Potenzgesetze gelten dann auch für ganzzahlige Exponenten.

Dezimalentwicklung

RUB

Bei konkreten Rechungen mit Taschenrechner etc.:
keine Brüche, sondern Dezimalzahlen mit Komma

Natürliche Zahlen: Darstellung als Dezimalzahlen

$$\begin{aligned} 73482 &= 2 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 \\ a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 &= a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Für nicht-ganzzahligen Anteil genauso:

$$\begin{aligned} 734,82 &= 2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 \\ 0,a_1 a_2 a_3 a_4 &= a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + a_4 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Brüche und Dezimalzahlen

RUB

1. Schritt: Zerlegung in ganzzahligen und gebrochenen Anteil

$$\frac{45}{19} = \frac{38+7}{19} = \frac{38}{19} + \frac{7}{19} = 2 + \frac{7}{19}$$

Im täglichen Leben: $2\frac{7}{19}$

2. Schritt: Dezimaldarstellung des gebrochenen Anteils

$$\frac{7}{19} = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ bestimmen mit schriftlicher Division

Dezimaldarstellung von Brüchen

RUB

Dezimaldarstellung bricht ab

$\frac{3}{8} = 0.375, \quad \frac{7}{20} = 0.035, \quad \frac{133}{1000} = 0.133$

(passiert, wenn Nenner nur Primfaktoren 2 und 5 enthält)

oder

Dezimaldarstellung wird irgendwann periodisch

$\frac{1}{3} = 0.33333.... = 0.\overline{3}, \quad \frac{1}{6} = 0.166666\ldots = 0.1\overline{6},$

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571\ldots = 0.\overline{142857}$

(passiert sonst)

Periodisch $\Leftrightarrow$ gleiche Ziffer **und** gleicher Rest

Beliebte Frage

Ist $0.999999... = 1$???

Eher philosophisch...

Erste Begründung

Multipliziere in $\frac{1}{3} = 0.3333333....$ beide Seiten mit 3.

Zweite Begründung

Unendliche Reihe $0.9999999.... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$
$\rightsquigarrow$ Grenzwerte (später)

Reelle Zahlen

Rechnen mit reellen Zahlen können wir schon,
zumindest addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Aufpassen: Teilen durch 0 ist nicht erlaubt!
Außer den Rechenregeln gibt es aber noch zwei weitere wichtige Eigenschaften:

1. Anordnung
   Zwei reelle Zahlen sind entweder gleich oder eine der beiden ist kleiner als die andere.
2. „Vollständigkeit“
   Die reellen Zahlen bilden ein Kontinuum ohne „Lücken“.

Ungleichungen: Rechnen mit < und >

Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten ein paar Regeln:

- Falls $x < y$ und $y < z$, dann ist $x < z$ („Transitivität“)
- Falls $x < y$, dann ist auch $x + z < y + z$
- Falls $x < y$ und $z > 0$, dann ist auch $x \cdot z < y \cdot z$

Intervalle

Die wichtigsten Teilmengen reeller Zahlen sind Intervalle
Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ ist

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ ein **abgeschlossenes Intervall**,

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ ein **offenes Intervall**,

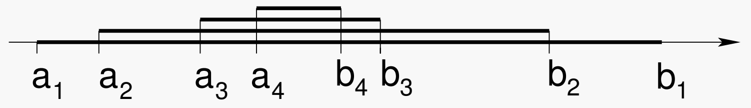
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ und
  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ sind **halboffene Intervalle**.

Auch wenn *unendlich* keine Zahl ist, ist es doch praktisch

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$,
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$ und
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$ zu schreiben.

Intervallschachtelungen

Ineinandergeschachtelte Intervalle mit rationalen Endpunkten:



Vollständigkeitsaxiom

Für jede Intervallschachtelung $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ gibt es (mindestens) eine reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist.

Lücken in $\mathbb{Q}$

Tatsache: Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt immer eine weitere rationale Zahl.

Trotzdem: Lücken dazwischen!

Wurzel aus 2

Problem: Quadrat mit Flächeninhalt 2 konstruieren

Gesucht: Seitenlänge x

Gleichung: $x \cdot x = 2$

Behauptung

Für keine rationale Zahl x ist $x \cdot x = 2$.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Mathematischer Beweis

Idee

Wir tun so, als ob es eine solche Zahl $x = \frac{p}{q}$ gibt und zeigen, dass das nicht gutgehen kann.

Dabei dürfen wir annehmen, dass $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind, d.h. wir haben schon gekürzt.

Indirekter Beweis

Man nimmt das Gegenteil dessen an, was man eigentlich zeigen möchtest und weist nach, dass das auf eine unsinnige (falsche) Aussage führt.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Konkret:

Wenn $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ wäre, dann wäre $p^2 = 2q^2$.

1. Fall: p ist nicht durch 2 teilbar. Dann steht rechts eine **gerade** und links eine **ungerade** Zahl.
   Das kann nicht sein!
2. Fall: p ist durch 2 teilbar. Dann ist
   1. q *nicht* durch 2 teilbar und
   2. $p = 2m$ für eine ganze Zahl m,
      d.h. $p^2 = (2m)^2 = 4m^2$.
      $\Leftrightarrow\ 4m^2 = 2q^2 \ \Leftrightarrow\ 2m^2 = q^2$

   Kann auch nicht sein, denn nun steht links eine **gerade** und rechts eine **ungerade** Zahl.

   Es geht nicht! Es gibt keine solche Zahl $\frac{p}{q}$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 Ruhr-Universität Bochum Dr. Jörg Härterich

Es gibt $\sqrt{2}$

Auch wenn keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ Lösung von

$$x^2 = 2$$

ist, gibt es doch eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft.
Konstruiere dazu Intervallschachtelung

$$\begin{aligned}
[a_1, b_1] &= [1,\ 2] \\
&\quad \text{zu klein} \quad \text{zu groß} \\
[a_2, b_2] &= [1.4,\ 1.5] \\
[a_3, b_3] &= [1.41,\ 1.42] \\
[a_4, b_4] &= [1.414,\ 1.415] \\
\vdots &\quad \vdots
\end{aligned}$$

Vollständigkeit $\Rightarrow$ Intervallschachtelung enthält eine reelle Zahl

Irrationale Zahlen

Rationale Zahlen: Dezimalentwicklung abbrechend oder schließlich periodisch
Irrationale Zahlen: Dezimalentwicklung unendlich und nicht periodisch

Einige Irrationalzahlen:

- $\sqrt{n}$, falls n keine Quadratzahl
- π ($\rightsquigarrow$ Kreisfläche, Kreisumfang, Kugelvolumen,...)
- e (Eulersche Zahl)
- die meisten Logarithmen (siehe Kapitel 2)
- $0.123456789101112131415161718202122232425\ldots$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Nenner rational machen

Konvention: Möglichst keine Wurzeln im Nenner.

Binomische Formel benutzen

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Der Betrag einer reellen Zahl

Der Betrag von x, geschrieben $|x|$ ist der Abstand des Punktes x auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt.
Anders ausgedrückt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Beispiele:

$$|33| = 33, \quad |-17| = 17, \quad |x^2| = x^2, \text{denn } x^2 \geq 0.$$

Als *Abstand* ist er immer größer (oder gleich) Null.

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Rechenregeln für Beträge

Theorem

Für beliebige reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|x| \geq 0$ *und* $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$,

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(**Dreiecksungleichung**),*

Begründung

(i) klar

(ii) vier Fälle unterscheiden

(iii) Beide Seiten sind nicht negativ $\rightsquigarrow$ Quadrieren erlaubt

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 \Leftrightarrow xy \leq |x| \cdot |y|$$

Die Dreiecks-Ungleichung

Variante der Dreiecksungleichung

Für beliebige reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt immer

$$|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$$

In Worten:

„Von Bochum nach Dortmund über Gelsenkirchen dauert länger als von Bochum nach Dortmund.“

Beweis:

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y| = |x-z|+|y-z|$$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Gleichungen mit Beträgen

Beispiel

Für welche reellen Zahlen ist der Abstand zu 0 genau doppelt so groß wie der Abstand zu 30?

$$|x| = 2|x - 30|$$

Fallunterscheidung

1. Falls $x \geq 30$, dann auch $x > 0$
   Also $x = 2(x - 30)$, das heißt $x = 60$.
2. Falls $0 < x < 30$, dann ist $x = 2(30 - x)$ zu lösen, was auf $x = 20$ führt
3. Falls $x \leq 0$, dann ist $-x = 2(30 - x)$ zu lösen
   führt nur auf $x = 60$ $\rightsquigarrow$ keine Lösung mit $x < 0$

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Ungleichungen mit Beträgen

Ähnliches Vorgehen bei Ungleichungen
Achtung: Multipliziert man ein Ungleichung mit einer negativen Zahl, dann wird aus $<$ ein $>$ und umgekehrt.

Beispiel: $|x - 3| - |x + 2| < 4$

Fallunterscheidung:

1. 1. Fall: $x \geq 3$, also $|x - 3| = x - 3$ und $|x + 2| = x + 2$
   Löse $x - 3 - (x + 2) < 4 \Leftrightarrow -5 < 4 \rightsquigarrow$ immer erfüllt
2. 2. Fall: $-2 < x < 3$, also $|x - 3| = 3 - x$ und $|x + 2| = x + 2$
   Löse $3 - x - (x + 2) < 4 \Leftrightarrow -2x < 3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$
3. 3. Fall: $x \leq -2$, also $|x - 3| = 3 - x$ und $|x + 2| = -x - 2$
   Löse $3 - x - (-x - 2) < 4 \Leftrightarrow 3 - x + x + 2 < 4 \Leftrightarrow 5 < 4$
   $\rightsquigarrow$ nie erfüllt
   Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R}; x > -\frac{3}{2}\}$.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Noch ein Beispiel

Aufgabe

Für welche reellen Zahlen ist $\dfrac{3}{|x-9|} > \dfrac{2}{x+2}$?

Lösung:

1. Es muss $x \neq 9$ und $x \neq -2$ sein
2. 1. Fall: $x < -2$, also $|x-9| = 9-x$ und $x+2<0$
   Löse $3(x+2) < 2(9-x) \Leftrightarrow 3x+6 < 18-2x \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$
   erfüllt für alle $x < -2$
3. 2. Fall: $-2 < x < 9$, also $|x-9| = 9-x$ und $x+2>0$
   Löse $3(x+2) > 2(9-x) \Leftrightarrow 3x+6 > 18-2x \Leftrightarrow x > \frac{12}{5}$
4. 3. Fall: $x > 9$, also $|x-9| = x-9$ und $x+2>0$
   Löse $3(x+2) > 2(x-9) \Leftrightarrow 3x+6 > 2x-18 \Leftrightarrow x > -24$
   $\rightsquigarrow$ für alle $x > 9$ erfüllt

Lösungsmenge $L = (-\infty,-2) \cup (\frac{12}{5},9) \cup (9,\infty)$.

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Komplexe Zahlen: Definition

Offenbar hat die Gleichung $x^2+1=0$ *keine* reelle Lösung
Carl Friedrich Gauß: „erfinde“ neue Zahlen, die solche Gleichungen lösen!

Imaginäre Einheit

1. Schritt: Neue Zahl i mit der Eigenschaft $i \cdot i = -1$.

Komplexe Zahlen

2. Schritt: Komplexe Zahlen $=$ Zahlen der Form
$a + i \cdot b = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
a heißt Realteil, b heißt Imaginärteil
$\mathbb{C} =$ Menge aller komplexen Zahlen

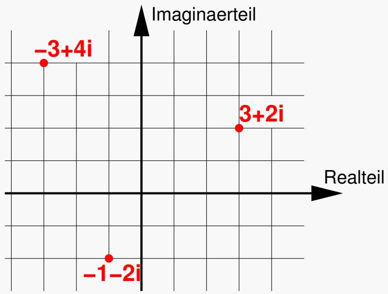
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Beispiele komplexer Zahlen

Achtung! **3** + **2i** hat Realteil **3** und Imaginärteil **2** (nicht 2i)

Geometrische Vorstellung:

Komplexe Zahlen	$\leftrightarrow$	Ebene („Gaußsche Zahlenebene“)
Realteil $\operatorname{Re} z$	$\leftrightarrow$	„x-Koordinate“
Imaginärteil $\operatorname{Im} z$	$\leftrightarrow$	„y-Koordinate“



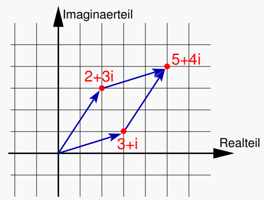
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Die vier Grundrechenarten

Addition

$$(u+iv)+(x+iy) = (u+x)+i(v+y)$$

„Realteil +Realteil“ und „Imaginärteil + Imaginärteil“



Analog: Subtraktion

$$(u+iv)-(x+iy) = (u-x)+i(v-y)$$

„Realteil -Realteil“ und „Imaginärteil - Imaginärteil“

Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Die vier Grundrechenarten

Multiplikation

$$(u+iv)\cdot(x+iy) = ux+i(uy+vx)+i^2(vy) = ux-vy+i(uy+vx)$$

„Ausmultiplizieren“ unter Beachtung von $i^2 = -1$

Beispiele:

$$(5+3i)(4+5i) = 20+12i+25i-15 = 5+37i$$

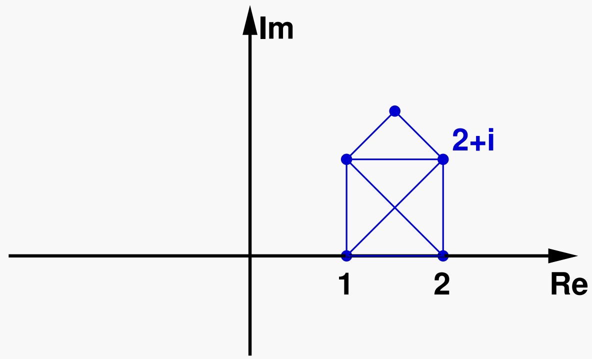
$$(3+4i)(3-4i) = 9+12i-12i+16 = 25$$

$$2i(4+i) = 8i+2i^2 = -2+8i$$

Multiplikation in der Zahlenebene

Aufgabe

Multiplizieren Sie die Eckpunkte des Häuschens mit i.



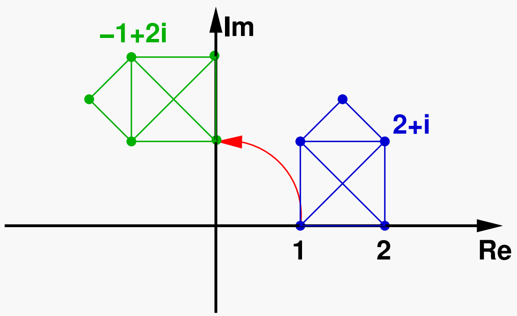
RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Multiplikation in der Zahlenebene

Multiplikation mit i

Geometrisch: Multiplikation mit i entspricht **Drehung** um 90° gegen den Uhrzeigersinn.



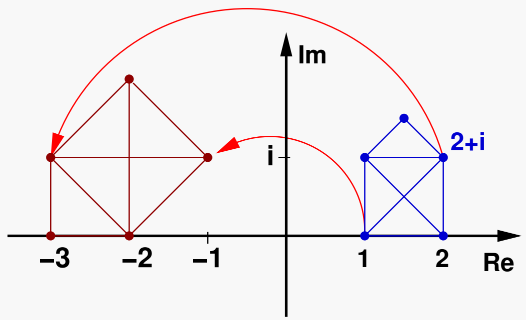
RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Multiplikation in der Zahlenebene

Multiplikation mit $-1+i$

Geometrisch: Multiplikation mit $-1+i$ entspricht einer **Drehstreckung**, genauer: Drehung um 135° gegen den Uhrzeigersinn und Streckung mit Dehnungsfaktor $\sqrt{2}$.
Erklärung: später



RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Mathematik-Vorkurs 2010 | Ruhr-Universität Bochum | Dr. Jörg Härterich

Die vier Grundrechenarten

Dividieren

$$\frac{u+iv}{x+iy} = ???$$

Löse Gleichung

$$\frac{u+iv}{x+iy} = a+ib \Leftrightarrow u+iv = (x+iy)(a+ib) = ax-by+i(ay+bx)$$

bzw. zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} ax-by & = & u \\ ay+bx & = & v \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{ux+vy}{x^2+y^2} \\[2ex] b & = & \dfrac{vx-uy}{x^2+y^2} \end{array}\right.$$

Komplex konjugierte Zahlen

Definition

Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann heißt $\bar{z} = x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Physiker schreiben meist z^* statt $\bar{z}$.

Beobachtung

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

Reell und sogar ≥ 0!

Definition: Betrag einer komplexen Zahl

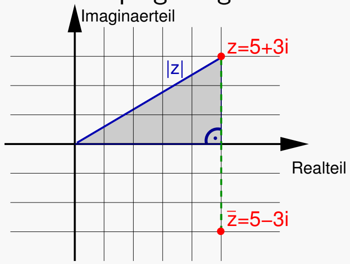
Der Betrag von z, geschrieben $|z|$ ist der Abstand des Punktes $z = x+iy$ in der komplexen Ebene vom Nullpunkt (Pythagoras!).

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Anschaulich

Komplexe Konjugation = Spiegelung an der reellen Achse



Rechnen mit komplex konjugierten Zahlen

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\bar{\bar{z}} = z$ für $z \in \mathbb{C}$
- $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln

Einfacher dividieren: Nenner reell machen

Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{3+i}{2-3i} &= \frac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= \frac{3+11i}{2^2+3^2} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i \end{aligned}$$

Allgemein

$$\begin{aligned} \frac{u+iv}{x+iy} &= \frac{(u+iv)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} \\ &= \frac{ux+vy+i(vx-uy)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

RUB
Einführung
Erste Beispiele
Mengen
Verknüpfungen
Natürliche Zahlen
Vollständige Induktion
Potenzgesetze
Abzählen
Binomischer Satz
Rationale Zahlen
Bruchrechnung
Dezimalzahlen
Reelle Zahlen
Eigenschaften
Beträge
Komplexe Zahlen
Definition und Rechenregeln