Übungen zur Vorlesung Algebraische Kurven

3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Sei $\phi : GL(2,K) \to Mat(2,K) \times K \simeq K^5$ die durch $\phi(A) = \left(A; \frac{1}{\det A}\right)$ gegebene Abbildung.
Zeigen Sie:

1. Das Bild $\phi\left(GL(2,K)\right)$ ist eine algebraische Menge.
2. Es gibt polynomiale Abbildungen $M : K^5 \times K^5 \to K^5$ und $J : K^5 \to K^5$ sodass $\phi(A \cdot B) = M(\phi(A), \phi(B))$ und $\phi(A^{-1}) = J(\phi(A))$ für alle $A, B \in GL(2,K)$.

Aufgabe 2.
Sei V die Vereinigung aller Geraden $\overline{PQ}$ in $\mathbf{C}^4$ mit $P \in C_1 = \{(t, t^2, t^3, 0) : t \in \mathbf{C}\}$ und $Q \in C_2 = \{(0, s, 0, 1) : s \in \mathbf{C}\}$ ("join variety").
Ist V eine algebraische Menge? Wenn nicht, was ist der Zariski Abschluß von V in $\mathbf{C}^4$?

Aufgabe 3. Sei K ein unendlicher Körper.
Zeigen Sie:

$$C = \{(x, y, z) \in K^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

hat unendlich viele Elemente.

Abgabe: 14. Mai 2008