Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 1

Abgabetermin: 29. Oktober 1999

1. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv?

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^2 + x$$
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(x) = x^2 + x$$

2. Welche Mengen natürlicher Zahlen werden durch folgende Formeln beschrieben?

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m^2 = n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m+1\} \\ C &= \mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : \exists m, p \in \mathbb{N} : (1 < m < n) \wedge (mp = n)\} \end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Gleichungen gelten für beliebige Mengen A,B,C?

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Man nehme an, dass $g \circ f$ bijektiv ist.

   Folgt daraus, daß f oder g surjektiv oder injektiv ist?

5. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, A_j eine durch $j \in J$ indizierte Familie von Teilmengen von X.

   Zeige:

$$f\left(\cap_{j \in J} A_j\right) \subset \cap_{j \in J} f(A_j)$$
$$f\left(\cup_{j \in J} A_j\right) \subset \cup_{j \in J} f(A_j)$$

   Für welche der beiden Fällen ist eine echte Inklusion möglich?

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 2

Abgabetermin: 5. November 1999

1. Sei K eine angeordneter Körper.

   Zeigen Sie, dass die durch $c(x) = x^3$ gegebene Abbildung $c : K \to K$ injektiv ist.

2. Sei K eine angeordneter Körper, $x, y, \lambda \in K$ mit $0 < \lambda < 1$ und $x < y$.

   Zeigen Sie:

$$x < \lambda x + (1 - \lambda) y < y$$

3. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Körperaxiome: In jedem Körper K gilt $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (wobei $2 = 1 + 1$ und $x^2 = x \cdot x$.)

4. Sei K ein Körper, a ein fest gewähltes Element von K.

   Zeigen Sie: Die Abbildung $f : x \mapsto x + a$ ist eine bijektive Abbildung von K nach K.

5. Sei K ein angeordneter Körper. Das Maximum $\max\{x, y\}$ ist definiert durch $\max\{x, y\} = y$ falls $y > x$ und $\max\{x, y\} = x$ sonst. Zeigen Sie:

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|)$$

(*) 6. Seien K und L zwei Körper mit $\#K = \#L = 3$.

   Zeigen Sie: Es gibt einen Körperisomorphismus $\phi : K \to L$, d.h. eine bijektive Abbildung $\phi : K \to L$, sodass $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, sowie $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ und $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ für alle $x, y \in K$.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 3

Abgabetermin: 12. November 1999

1. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

2. Zeigen Sie:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+m}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$$

3. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} k! < (n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

4. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n \geq n^3$?

5. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(∗) 6. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$ durch 7 teilbar.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 19. November 1999

1. Berechnen Sie:

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}i\right)^3, \quad 2\overline{\left(\frac{1}{1+i}\right)}, \quad \sum_{k=1}^{323467} i^k$$

2. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \; b_n = \binom{100n}{n^2}, \; c_n = \sqrt[n]{n}, \; d_n = (-1)^n \frac{3n+1}{5n^2+2}.$$

3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $a_n = z^n$?

4. Zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ gilt:

$$\frac{x+y}{2} \;\geq\; \sqrt{xy} \;\geq\; \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

   Anmerkung: Diese drei Ausdrücke bezeichnet man als das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel von x und y.

5. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass die durch

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

   definierte Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert.

(*) 6. Seien a, b reelle Zahlen, und a_n die durch $a_1 = a$, $a_2 = b$ und $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ für $n \geq 1$ rekursiv definierte Folge.

   Zeige, dass $(a_n)_n$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 5

Abgabetermin: wegen "Dies" erst am 30. November 1999

1. Sei (a_n) eine Folge sodass die durch $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{2n+1}$ und $d_n = a_{5n}$ definierten Teilfolgen (b_n), (c_n) und (d_n) alle konvergent sind.

   Folgt daraus, dass auch (a_n) konvergent ist?

2. Zeige:

   Für alle $k \in \mathbb{N}$, $c > 1$ gilt: $\lim a_n = 0$ für $a_n = \frac{n^k}{c^n}$.

   (Tip: Zeige zuerst $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{c}$ und dann $\exists K > 0, c > q > 1 : \forall n : |a_n| \leq K\frac{1}{q^n}$.)

3. Untersuche diese Folgen auf Konvergenz, und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right),\ b_n = \frac{3^n+2}{7^n},\ c_n = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n},\ d_n = \left(\frac{2}{3}n\right)^{-n} n!$$

4. Prüfe auf Monotonie (beachte $n \in \mathbb{N}$, also $n \neq 0$):

$$\left(n^2 + (-1)^n\right),\ (n^4 - 2n^3),\ (n^{1-n}),\ \left(n + \sqrt{7 + \frac{1}{n^2}}\right),\ \left(n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

5. Zeige: Sei z_n eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann besitzt (z_n) eine konvergente Teilfolge.

(*) 6. Zeige: Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 13

Abgabetermin: 4. Februar 2000

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie: f ist stetig.

2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt "gerade" falls $f(x) = f(-x) \forall x$ und "ungerade" falls $f(-x) = -f(x) \forall x$.

   (a) Zeigen Sie: Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade.

   (b) Ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist genau dann gerade wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden k.

3. Die "Legendre-Polynome" sind wie folgt definiert:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!(2^n)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n \right]$$

   Zeige Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Legendre-Polynom P_n genau n paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $]-1,1[$ besitzt.

4. Berechne

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1 - xe^{\frac{x}{2}}}{x^3} \right), \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x} \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^{\sqrt{3}}}$$

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und f eine n-mal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Beweise folgende "Leibnitzregel" für höhere Ableitungen (wobei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f bezeichnet mit $f^{(0)} = f$):

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

(∗) 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 7

Abgabetermin: 10. Dezember 1999

1. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz/Divergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n+2}$$

   und berechne

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m+1}$$

2. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz/Divergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4}}}$$

3. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle n.

   Zeige: Wenn $\sum_n a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_n a_n^2$.

   Gilt die Umkehrung?

4. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle n, und (b_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

   Zeige: Wenn $\sum_n a_n$ konvergiert, dann auch $\sum_n a_n b_n$.

5. Sei $(a_n)_n$ eine Folge, sodass die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert. Für jede natürliche Zahl n sei r_n definiert durch

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_n.$$

   Zeige: $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

(*) 6. Sei p_n die durch

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

definierte Folge. Untersuche, ob p_n konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 6

Abgabetermin: 3. Dezember 1999

Achtung: *Keine Vorlesung am Freitag, den 26. November ("Dies academicus")*

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \; b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n},$$
Zeige: Für $n < 1\,000\,000$ gilt $a_n > b_n$, aber $\lim a_n = 0$ und $\lim b_n = \frac{1}{2}$.

2. Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ für $n \geq 1$.

   Konvergiert a_n und wenn ja, wogegen?

3. Seien $a_1, \dots, a_k$ nichtnegative reelle Zahlen.

   Zeige:
$$\lim_p \sqrt[p]{a_1^p + \ldots + a_k^p} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$$

4. Seien $a_1, \dots, a_k$ reelle Zahlen mit $a_i > -1$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$.

   Zeige
$$\prod_{i=1}^{n} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

5. Sei $n \in \mathbb{N}$, A eine Menge mit n Elementen und B eine Menge mit $n+2$ Elementen.

   Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von B nach A?

(*) 6 Die Folgen (a_n) und (b_n) seien gegeben $a_1 = a$, $b_1 = b$ und
$$a_{n+1} = 2\frac{a_n b_n}{a_n + b_n}, \; b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
für $n \geq 1$, wobei a und b feste reelle Zahlen mit $0 < a < b$ sind.

Zeigen Sie, dass (a_n) und b_n konvergieren und bestimmen Sie die Grenzwerte.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 8

Abgabetermin: 17. Dezember 1999

1. Sei
$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$
und
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$
Zeige $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ konvergieren, nicht aber $\sum_n c_n$.

2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.
Zeige: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

3. Berechne $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

4. Sei $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \to U$ stetig, $a \in U$ und x_n eine Folge in U sodass $\lim x_n = a$ und $x_{n+1} = f(x_n)$.
Zeige: $f(a) = a$.

5. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

(∗) 6. Für $x \in \mathbb{Q}$ sei $q(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch
$$f(x) = \begin{cases} 1/q(x) & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
definiert.
Zeige, dass f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $x \notin \mathbb{Q}$.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 7. Januar 2000

1. Sei $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ Bestimme $\lim a_n$.

2. Zeige: Es gibt Folgen a_n, b_n, A_n, B_n, α_n, β_n in $\mathbb{R}$ mit $\lim a_n = \lim A_n = \lim \alpha_n = +\infty$ und $\lim b_n = \lim B_n = \lim \beta_n = 0$, sodass

   - $\lim(a_n b_n) = +\infty$
   - $\lim(A_n B_n) = 42$
   - $\lim(\alpha_n \beta_n) = 23$

3. Zeige:

   (a) Sei z_n eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$. Dann gilt $\lim \overline{z_n} = \bar{z}$.

   (b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

   (c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|e^{ix}| = 1$.

4. Die Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right)$$

   und

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(z) - \exp(-z)\right).$$

   Zeige: Es gilt:

$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

   und

$$(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

5. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = |\phi(x + \frac{1}{2}) - x|$.

   Welche der Abbildungen ϕ und g sind stetig?

(*) 6. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie in Aufgabe 5. Sei α eine irrationale reelle Zahl. Zeige:

   Jede Zahl im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ ist Häufungspunkt der Folge $a_n = n\alpha - \phi(n\alpha)$

(*) 7. Sei K ein endlicher Körper.

   Zeige:

$$(1+1) \cdot \left(\sum_{x \in K} x \right) = 0$$

W1. Zeige: Für $x \geq 0$, $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

W2. Zeige: Für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

W3. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3} n!$$

W4. Zeige: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

W5 Für $k, n \in \mathbb{N}$ leite man eine Formel her, die angibt, wieviele injektive Abbildungen von einer Menge mit k Elementen in eine Menge mit n Elementen existieren.

Die Aufgaben W1-W5 sind "Weihnachts-" oder "Wiederholungsaufgaben". Sie werden wie (*)-Aufgaben gewertet, sind aber einfacher. Dadurch soll es ermöglicht werden, eventuelle Punkterückstande aufzuarbeiten. Mindestpunktzahl für dieses Aufgabenblatt ist also $10 = \frac{2}{3}(3 \cdot 5)$.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: 14. Januar 2000

1. Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetige bijektive Abbildung.
   Zeige: f ist streng monoton (steigend oder fallend).

2. Gibt es a) eine bijektive, b) eine stetige bijektive Abbildung von $[0, 1]$ nach $[0, 1[$?

3. Zeige: $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

4. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt
   (d.h. $\exists c \in [a, b] : f(c) = c$).

5. tan ist definiert durch $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ für $\cos(x) \neq 0$.
   Zeige: Wenn $\cos(x), \cos(y), \cos(x + y) \neq 0$, dann

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

(*) 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Nullpunkt stetig ist. Sei ferner $f(0) = 1$ und $f(x + y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
   Zeige: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 11

Abgabetermin: 20. Januar 2000

1. Skizzieren Sie zeichnerisch folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(iz) < 2\} \\ B &= \{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| = 1\} \\ C &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = \Re(z) + 1\} \\ D &= \{z \in \mathbb{C} : |z-2| + |z+2| < 5\} \\ E &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \right\} \end{aligned}$$

2. Leiten Sie Formeln her, die $\sin(nx)$ für $n = 3, 5$ als Polynom in $\sin(x)$ ausdrücken.

3. (a) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gibts es ein $z \in \mathbb{C}$ sodass $z^2 + az + b = 0$.
   (b) Zeigen Sie: $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

4. Bestimme die exakten Werte von $\sin(t)$ und $\cos(t)$ für $t = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$ mit Hilfe der Additionstheoreme.

5. Zeige : $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = x$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

(∗) 6. Sei n eine natürliche Zahl. Betrachte das in den Einheitskreis eingeschriebene gleichmässige n-Eck, d.h. das Polygon, dessen Ecken gerade die n-ten Einheitswurzeln sind. Leite eine Formel für den Umfang U_n her und zeige $\lim_{n\to\infty} U_n = 2\pi$.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 27. Januar 2000

1. Zeigen Sie: $\lim_{x\searrow 0} x^x = 1$ und $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2. Zeigen Sie: Jedes reelle Polynom ungerader Ordnung hat eine Nullstelle.

3. Weisen Sie nach, daß $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion arctan.

4. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen: $x^{(x^x)}$, sinh, $\frac{1}{1+x^2}$ und $\log(2+\cos x)$.

5. Sei $s > 1$, $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert. Hinweis: Zeige zuerst

$$\sum_{n=1}^{2^m} |n^{-s}| \leq 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \left(2^k\right)^{-s}$$

   Bemerkung: Die Funktion $\zeta(s)$ heisst Riemannsche Zetafunktion.

(*) 6. Sei

$$f(x) = \begin{cases} x(1+2x\sin(\frac{1}{x})) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

   Zeige, dass f in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) > 0$, dass andererseits aber kein $\epsilon > 0$ existiert, für dass f eingeschränkt auf $[-\epsilon, +\epsilon]$ monoton steigend ist.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 14

Abgabetermin: 11. Februar 2000

1. Berechne $\int_0^1 e^x \, dx$ via Approximation durch Treppenfunktionen.

2. Für $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx) \, dx \text{ und } \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx) \, dx$$

3. Sei $n > 0$. Bestimmen Sie alle Maxima der durch $f(x) = x^n e^{-x}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

4. Für $f \in C[a, b]$ und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$$

und

$$||x||_\infty = \max_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}$$

Zeige:

$$||f||_\infty = \lim_{p \to \infty} ||f||_p$$

5. Seien P_n die Legendre-Polynome (siehe Aufgabenblatt 13). Zeige:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & \text{falls } n = m \end{cases}$$

(∗) 6. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, also gleichmässig durch Treppenfunktionen approximierbar.

Zeige:

Der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} f(x)$ existiert.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 15

Abgabetermin: 7. April 2000

1. Zeige: Das Legendre-Polynom P_n (siehe Aufgabenblatt 13) genügt der Differentialgleichung
$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x).$$

2. Man untersuche die durch $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ gegebene Funktion auf lokale Extrema in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Man bestimme eine Rekursionsformal für die Integrale $I_m = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^{2^m}}} dx$.

4. Unter Verwendung von Aufgabe 6* von Blatt 13 zeige man: Es gibt eine auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktion f mit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \text{ oder } x \geq 3 \\ 1 & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

5. Sei $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n$. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(k)}(1), f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

6. Sei $\sum_n z_n$ eine komplexe Reihe, die nicht absolut konvergent ist.

   Zeige: Es gibt eine divergente Umordnung, also eine Bijektion $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $\sum_n z_{\zeta(n)}$ divergiert.

7. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in (a,b)$, sodass f in allen Punkten $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ differenzierbar ist. Man nehme darüberhinaus an, dass $\lim_{x \to c} f'(x)$ existiert.

   Zeige: Dann ist f in c differenzierbar und es gilt $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 1

Abgabetermin: 14. April 2000

1. Bestimme die ersten Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der Potenzreihenentwicklung $\sum a_k x^k$ der Funktionen
$$\sin(xe^x),\ e^{\cos x},\ \frac{x^2}{1+\sin x},\ \log\left(4+x^2\right).$$

2. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}x^k,\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sin n)\,x^n,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(4k^3+3k^4\right)x^k,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^k+1\right)^2 x^k,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\right)x^k,$$

3. Zeige: Die für $s > 1$ durch $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ definierte Riemannsche Zetafunktion ist differenzierbar.

4. Zeige: Die Funktionenfolge $g_n(x) = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$ konvergiert auf $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ gleichmäßig gegen konstant Null, aber
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} g_n(x)dx = 1.$$

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) = x/\left(n(1+nx^2)\right)$. Zeige: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und definiert eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion ϕ.

(∗) 6. Zeige: Für die oben definierte Funktion ϕ gilt:
$$\lim_{x\to\infty} x\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Webpage: `http://www.math.unibas.ch/~winkel/infini2.html`

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 2

Abgabetermin: 25. April 2000

1. Bestimme alle zweimal differenzierbaren Funktionen f auf $\mathbb{R}$ mit $f = -f''$.

2. Sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $f(1/2n) = 0$ und $f(1/(2n+1)) = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeige:
   $$\sup_{x \in [-1,1]} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f^{(n)}(x)| = +\infty$$

3. Bestimme die Taylorreihe von $\arcsin :]-1, +1[\to \mathbb{R}$.

4. Zeige: Seien P, Q Polynome mit $Q(0) \neq 0$.

   Dann definiert $f(x) = P(x)/Q(x)$ eine reell-analytische Funktion in einer Umgebung von 0.

5. Zeige, dass für n-mal stetig differenzierbare Funktionen f gilt:
   $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \iff \forall k \leq n : f^{(k)}(0) = 0$$

(*) 6. Durch
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$
   wird eine unendlich oft differenzierbare Funktion definiert (Aufgabe I:13.6).

   Zeige damit:

   - Es gibt eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 1$ für $x \geq 1$.
   - Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann gibt es eine Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, sodass $\phi(x) = h(x)$ für $|x| \leq 1$ und $\phi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$.

Webpage: `http://www.math.unibas.ch/~winkel/infini2.html`

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 3

Abgabetermin: 5. Mai

1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen oder offen?

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \{z \in \mathbb{R} : |z| \geq 2 oder z > 4\}, \{z \in \mathbb{R} : z > 2\}.$$

2. Zeige: Für beliebige Teilmengen A, B eines metrischen Raums X gilt: $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$.

3. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}, \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$$

4. Zeige: Für $x > 0$ konvergiert:

$$\int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt$$

(Dis so definierte Funktion heisst *Gamma-Funktion* $\Gamma(x)$.)

5. Für $N \in N$ definiere $C_N = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \right) - \log N$. Zeige:

   (a) $0 < C_N < 1$ für alle $N > 1$.

   (b) Der Grenzwert $\lim C_n$ existiert.

(*) 6. Sei $C^1[0,1]$ versehen mit der Norm $||f|| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ Dann gilt:

Die Menge der monoton steigenden Funktionen ist abgeschlossen in $C^1[0,1]$.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 12. Mai 2000

1. Man bestimme den Rand folgender Mengen:
   $\mathbb{Q}$, $\{z \in \mathbb{R} : \exists n, m \in \mathbb{Z} : z = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}$, $[0,1[\setminus\mathbb{Q}$.

2. Sei V ein normierter Vektorraum. Die *SNCF Metrik* auf V wird folgendermassen definiert:
   $$\delta(v,w) = \begin{cases} ||v-w|| & \text{falls } v \text{ und } w \text{ auf einer Gerade durch 0 liegen} \\ ||v|| + ||w|| & \text{sonst} \end{cases}$$
   Zeige, dass δ tatsächlich eine Metrik ist.

3. Sei Y Teilmenge in einem metrischen Raum. Zeige:
   Y ist genau dann offen, wenn $\partial Y \cap Y = \{\}$ und genau dann abgeschlossen, wenn $\partial Y \subset Y$.

4. Seien K und L kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige:
   $$K + L = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in K, z \in L : y + z = x\}$$
   ist auch kompakt.

5. Sei $x \in I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.
   Zeige: Die durch $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ gegebene Abbildung $\epsilon_x : C^1(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(∗) 6. Seien I, J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, und F die durch
   $$F(x) = \sup_{y \in J} f(x,y)$$
   definierte Abbildung.
   Zeige, dass F stetig ist.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 5

Abgabetermin: 19. Mai 2000

1. Skizziere die durch $\gamma : t \to (t \sin t, t \cos t, t)$ gegebene Kurve $\gamma : [-3\pi, +3\pi] \to \mathbb{R}^3$ und berechne ihre Länge.

2. Welche folgender Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind kompakt?
$$\mathbb{Z}^3, \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^4 = 1\}, \{(x,y,z) : x^2 + y^3 + z^4 = 1\},$$
$$\{(n,m,p) \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} = 1\}, \{(x,y,z) : 0 < |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$

3. Sei (X,d) ein metrischer Raum.
Zeige: Die durch $(x,y) \mapsto d(x,y)$ definierte Abbildung von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig.

4. Sei V der Vektorraum aller konvergenten reellen Folgen, versehen mit der Norm $||(a_n)_n|| = \sup_k |a_k|$.
Zeige: Die Abbildung $(a_n) \mapsto \lim a_n$ ist eine stetige Abbildung von V nach $\mathbb{R}$.

5. Sei $S = \{v \in \mathbb{R}^n : ||v|| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f, g : S \to \mathbb{R}^{>0} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ stetige Abbildungen.
Zeige: Es gibt Konstanten $K \geq C > 0$ sodass
$$Kf(v) \geq g(v) \geq Cf(v) \;\forall v \in S$$

(*) 6. Sei V der Vektorraum aller Abbildungen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} = 0$, versehen mit der Norm $||\phi|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi(n)|$
Ist V vollständig ?

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 6

Abgabetermin: 26. Mai 2000

1. Berechne die Bogenlänge von der durch $\gamma : t \mapsto (t^2, t^3)$ definierten Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

2. Sei $c \in \mathbb{R}^*$ und $f(t) = (e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t)$. Skizziere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, beweise, dass $f(\mathbb{R})$ jeden Kreis mit Radius $r > 0$ um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und bestimme den Schnittwinkel (in Abhängigkeit von r).

3. Reparametrisiere die durch $\gamma(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t, 1)$ gegebene Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ auf Bogenlänge.

4. Man finde eine Parameterdarstellung der Kurve
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1/4\}$$

5. Sei p eine Primzahl. Für $x \in \mathbb{Q}^*$ mit $x = p^s \frac{m}{n}$, $m, s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei weder m noch n durch p teilbar ist, definiere $|x|_p = p^{-s}$ und $|0|_p = 0$. Zeige, dass $d(x,y) = |x - y|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ definiert.

(*) 6. Zeige, dass durch $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(t) = t\sin(1/t)$ für $t \neq 0$ eine stetige, nicht rektifizierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert wird.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 7

Abgabetermin: 6. Juni 2000

1. Bestimme das begleitende Dreibein für die Kurve $t \mapsto (\sin t, \cos t, t)$.

2. Berechne den Krümmungsradius für alle Punkte auf der Kurve $\{(x,y) \in \mathbb{R} : y^3 = x^2\}$.

3. Zeige: Für jeden differenzierbaren Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(1) = (1,1)$ nimmt das Wegintegral des Vektorfelds $(x,y) \mapsto (2x, 2y)$ denselben Wert an.

4. Man bestimme das Wegintegral des Vektorfeld $(x,y) \mapsto (-y, x)$ über den Kreis mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $(1,1)$.

5. Zeige:

   Kompakte metrische Räume sind vollständig.

(*) 6. Sei $n > 2$. Gibt es eine stetige surjektive Abbildung von $[0,1]$ nach $Q_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i\}$?

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 8

Abgabetermin: 9. Juni 2000

1. Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

für jedes $k \in [0,1]$ konvergiert.

2. Seien $A, B > 0$ und E die durch

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : Ax^2 + By^2 = 1\}$$

beschriebene Ellipse. Drücke die Bogenlänge von E mit Hilfe der Funktionen $E(k)$ aus.

3. Man zeige, dass det : $Mat(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und bestimme $D(\det)$ in $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

4. Sei $V = \mathcal{C}^0([0,1])$ und $I : V \to \mathbb{R}$ die durch $I(f) = \int_0^1 (f(t))^2\, dt$ gegebene Abbildung.

   Für welche $g \in V$ ist I in g differenzierbar?

5. Seien V, W normierte Vektorräume und $L(V,W)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W. Zeige, dass

$$||f|| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{||f(v)||}{||v||}$$

eine Norm auf $L(V,W)$ definiert, sodass die durch $\zeta : (v,f) \mapsto f(v)$ gegebene Abbildung $\zeta : V \times L(V,W) \to W$ stetig ist.

(∗) 6. Zeige, dass ζ differenzierbar ist.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 16. Juni 2000

1. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $< , >$ und Norm $||v|| = \sqrt{< v, v >}$. Zeige, dass die durch $v \mapsto < v, v >$ gegebene Abbildung differenzierbar ist, und bestimme das Differential.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{K}$ die Menge der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass durch
$$\delta(K, L) = \max \left\{ \max_{x \in K} \{d(x, L)\}, \max_{x \in L} \{d(x, K)\} \right\}$$
mit $d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y)$ eine Metrik δ auf $\mathcal{K}$ definiert wird.

3. Berechne die Krümmung der "Zykloide" $\gamma : t \mapsto 23(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

4. Können die Vektorfelder $(3x^2 + xy, xy)$ und $(y, 0)$ auf $\mathbb{R}^2$ als Gradient einer Funktion dargestellt werden?

5. In welchen Punkten in $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x, y) = y\sqrt{3x^2 + y^2}$ differenzierbar und in welchen Punkten besitzt sie welche partiellen Ableitungen?

(*) 6. Sei $f \in C[0, 1]$. Zeige: $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) = 0$.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Pfingst-Zusatzblatt

Abgabetermin: 20. Juni 2000

Hinweis: Dieses Aufgabenblatt ist nicht obligatorisch. Die hier erzielbaren Punkte gehen nicht in die Berechnung der für das Testat zu erreichenden Mindestpunktzahl ein. Dieses Blatt dient also dem Ausgleich von Punktedefiziten.

P1. Sei [ ] die Gauss-Klammer, d.h. $[x] = \max\{n : n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$. Berechne $\int_0^1 \frac{[nx]}{n} dx$.

P2. Berechne $\int_2^4 \frac{1}{x^2+5x+6} dx$.

P3. Leite eine Rekursionsformel her für: $I_n = \int x(\log x)^n dx$.

P4. Für $n \in \mathbb{N}$, wie oft ist

$$f_n = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ differenzierbar?

P5. Gibt es eine Potenzreihe $f(x) = \sum_k a_k x^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$, sodass $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$?

P6. Zeige, dass es eine Umkehrfunktion für $\tan = \frac{\sin}{\cos} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ gibt und dass

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

für alle x, y mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$.

P7. Berechne $\sum_k k^2 x^k$. (Hinweis: Betrachte Taylorreihen geeigneter Funktionen.)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: 23. Juni 2000

1. Sei V das auf $\mathbb{R}^3$ durch $V = (-y/r^2, (x/r^2) + z, y)$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ gegebene Vektorfeld. Berechne $rotV$ und $\int_\gamma V \cdot ds$ für $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Berechne die Hesse-Matrix im Nullpunkt.

3. Zeige: Für alle 2-mal stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\Delta(fg) = f\Delta(g) + 2 < gradf, gradg > +g\Delta(f).$$

4. Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{>0}$ die durch $f(x,t) = t^{-n/2}e^{-||x||^2/4t}$ definierte Funktion. Zeige: f ist eine Lösung der "*Wärmeleitungsgleichung*"

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

5. Sei $c > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$, $\omega = ||k||c$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

   Zeige: Die durch $g(x,t) = f(< x, k > -\omega t)$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der *Schwingungsgleichung*

$$\Delta g - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} g = 0$$

(*) 6. Ist die Menge der positiv semidefiniten reellen Matrizen in $M(n \times n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ abgeschlossen? Offen?

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 11

Abgabetermin: 30. Juni 2000

1. Bestimme die globalen und lokalen Extrema der durch $f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$ gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2. Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $g(x) = sin(|f(x)|^2)$. Bestimme $grad\ g$.

3. Sei $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $p > 2$ und $f : S \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^p + y^p + z^p$. Bestimme Minima und Maxima von f auf S.

4. Zeige, dass $T = \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 = 1, 4x = 3z\}$ kompakt ist und bestimme Maxima und Minima von $f(x,y,z) = x + y - z$ auf T.

5. Sei $W = \{(x,y,z) : x > 0, 0 < y < \pi, 0 < z < 2\pi\}$ und $f : (x,y,z) \mapsto (x\cos y, x\sin y \sin z, x \sin y \cos z)\}$. Bestimme das Bild $f(W)$ und zeige, dass f ein Diffeomorphismus von W auf $f(W)$ ist.

(∗) 6. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Zeige: f hat kein lokales Minimum in $(0,0)$, aber für jedes $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ besitzt die durch $f_v : t \mapsto f(at, bt)$ definierte Funktion $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein lokales Minimum in 0.

Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 12

Abgabetermin: 7. Juli 2000

1. Sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(1-x)y(1-y) = 0\}$. Skizziere S und zeige, dass es keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit $S = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ und $gradf(x,y) \neq (0,0)$ für alle $(x,y) \in S$.

2. Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die durch $f(x,y) = x^2 - y^3$ und $g(x,y) = -3y$ gegebenen Funktionen. Sei $S = \{f = 0\}$. Bestimme globale Extrema von $g|_S$ und berechne $gradf$ und $gradh$.

3. Für einen gegebenen Punkt $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ bestimme man die Ebene E mit $(a,b,c) \in E$, für die der durch E und die Ebenen $H_i = \{x_i = 0\}$ begrenzte Tetraeder minimales Volumen hat.

4. Sei $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ mit $q^n = \Pi_{k=1}^n x_k$.
   Zeige:
   $$\Pi_{k=1}^n (1 + x_i) \geq (1+q)^n$$

5. Seien $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$. Sei S die Menge aller der Weglänge nach parametrisierten Wege von p nach q und $L : S \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die jedem Weg seine Länge zuordnet. Bestimme, wo L auf S Minima annimmt.

(*) 6. Sei $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeige, dass es in einer Umgebung von $(1,0)$ eine Umkehrabbildung für f gibt, wähle eine solche Umgebung und bestimme explizit die Umkehrabbildung (Tip: Beachte $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.)