RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

50 Jahre

RUB

Endliche Gruppen orthogonaler Transformationen in dreidimensionalen reellen Vektorräumen

Proseminar: Geometrie und Darstellungstheorie

Fakultät für Mathematik

Basierend auf *"Finite Reflection Groups"* von Grove und Benson

Lukas Steenvoort

WiSe 2015/2016

Erinnerung 1.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sowie $A^T = (a'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$.
Für alle Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ gilt

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right) y_i = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_k y_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a'_{ki}y_i\right) = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle.$$

Die *orthogonale Gruppe* $\mathcal{O}(n)$ ist die Gruppe aller reellen orthogonalen $n \times n$-Matrizen:

$$\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = E_n\}.$$

Für einen n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt:

$$\mathcal{O}(V) = \{f : V \to V \mid \exists A \in \mathcal{O}(n) : f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \ \forall\ \mathbf{v} \in V\}.$$

Alle Elemente in $\mathcal{O}(n)$ sind längen- und winkeltreu, denn es gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle E_n\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle.$$

Folglich können Elemente in $\mathcal{O}(n)$ nur (komplexe) Eigenwerte der Norm 1 besitzen:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \ \Rightarrow\ \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle} = \sqrt{\langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \ \Rightarrow\ |\lambda| = 1.$$

Erinnerung 2.
Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, so gilt

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i \text{ mit } a_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x}\rangle,$$

denn ist δ_{ij} das Kronecker-Delta, also die Abbildung $(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$ so gilt:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x}\rangle = \left\langle \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle a_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}a_j = a_i.$$

Erinnerung 3.
Ist V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum, so gilt

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Insbesondere folgt damit die Existenz einer eindeutigen Zerlegung jedes Vektors in V:

$$\forall\ \mathbf{v} \in V\ \exists!\ (\mathbf{w}, \mathbf{w}') \in W \times W^{\perp} : \mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'.$$

§1 Orthogonale Transformationen in drei Dimensionen

Satz. *(Satz vom Fußball)*

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 3 und sei $A \in \mathcal{SO}(V) = \{T \in \mathcal{O}(V) \mid \det T = 1\}$. Dann ist A eine Drehung um eine Ursprungsgerade, also besitzt A einen Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum Eigenwert 1, so dass $A|_{(\mathbb{R}\cdot\mathbf{x})^\perp}$ eine zweidimensionale Drehung von $(\mathbb{R}\cdot\mathbf{x})^\perp$ ist.[1]

Die Grundaussage dieses Satzes wurde bereits im Jahre 1776 erstmals von Leonhard Euler bewiesen – er formulierte den Satz wie folgt:

> *Quomodocunque sphaera circa centrum suum conuertatur, semper assignari potest diameter, cuius directio in situ translato conueniat cum situ initiali.*

Eine freie Übersetzung in moderner Terminologie:

> *Wie immer man eine Kugel auch im Raum bewegt, so kann man, solange der Mittelpunkt fest bleibt, stets zwei gegenüberliegende Punkte finden, deren Verbindungsstrecke invariant unter der Bewegung ist.*

Beweis.
Da das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda A - E_3)$ ein Polynom dritten Grades mit reellen Koeffizienten ist, muss mindestens eine der Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reell sein, da komplexe Nullstellen nur paarweise auftreten können. Zudem gilt $1 = \det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Für die Eigenwerte von A gibt es nun (bis auf Vertauschung der Indizes) drei Möglichkeiten:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \notin \mathbb{R}.$$

In jedem Fall ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert. Für einen zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{x}$ gilt:

$$\mathbb{R} \ni \mathbf{y} \perp \mathbf{x} \;\Rightarrow\; 0 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{y}, E_n\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{y}, A^TA\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{y}, A^T\mathbf{x}\rangle = \langle A\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle \;\Rightarrow\; A\mathbf{y} \perp \mathbf{x}.$$

Somit ist $\mathcal{E} := (\mathbb{R}\cdot\mathbf{x})^\perp$ invariant unter A. Ist $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine Basis von $\mathcal{E}$, so ist $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine Basis von $V = (\mathbb{R}\cdot\mathbf{x}) \oplus \mathcal{E}$, bezüglich derer A folgende Blockgestalt besitzt:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

wobei (1) die Matrix der Einschränkung $A|_{\mathbb{R}\cdot\mathbf{x}} : \mathbb{R}\cdot\mathbf{x} \to \mathbb{R}\cdot\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}\}$ ist, während der untere Block die Matrix von $A|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ist. Da die Determinante invariant unter Basiswechseltransformationen ist, folgt

$$1 = \det A = \det A' = \det(1) \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $A|_{\mathcal{E}}$ eine Drehung der Ebene $\mathcal{E}$. □

[1] Die Ursprungsgerade $\mathbb{R}\cdot\mathbf{x}$ nennt man hierbei die *Drehachse* oder *Rotationsachse*.

Definition. *(Spiegelungen eines dreidimensionalen Vektorraums)*
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 3. Eine *Spiegelung* in $\mathcal{O}(V)$ ist eine lineare Abbildung $S \in \mathcal{O}(V)$, welche jeden Punkt in V über eine Ursprungsebene $\mathcal{E}$ spiegelt:

$$S\mathbf{x} = \mathbf{x} \ \forall \ \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \quad S\mathbf{y} = -\mathbf{y} \ \forall \ \mathbf{y} \in \mathcal{E}^{\perp}.$$

Für jeden Vektor $\mathbf{x}$ existiert eine Darstellung $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ mit $\mathbf{x}' \in \mathcal{E}, \mathbf{x}'' \in \mathcal{E}^{\perp}$. Es folgt

$$S\mathbf{x} = S(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') = S\mathbf{x}' + S\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}''.$$

Ist $\mathbf{x}_1$ ein Einheitsvektor von $\mathcal{E}^{\perp}$ und $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{E}$, so gilt:

$$S\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} S\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle \mathbf{x}_i = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_3 \rangle \mathbf{x}_3 = \mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1.$$

Bezüglich dieser Orthonormalbasis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ von V besitzt S folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S^2 = 1.$$

Satz. *(Drehspiegelungen)*
Sei V wie oben. Jedes Element $T \in \mathcal{O}(V) \setminus \mathcal{SO}(V) = \{T \in \mathcal{O}(V) \mid \det T = -1\}$ ist eine *Drehspiegelung*, also eine Spiegelung über eine Ursprungsebene $\mathcal{E}$, gefolgt von einer Drehung durch die zur Ebene orthogonalen Ursprungsgerade.

Beweis.
Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von S, so ergeben sich nach demselben Argument wie beim vorherigen Satz (bis auf Vertauschung der Indizes) drei Möglichkeiten für die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \notin \mathbb{R}.$$

Sei $\mathbf{x}_1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 und sei $\mathcal{E} = (\mathbb{R} \cdot \mathbf{x}_1)^{\perp}$. Auch hier gilt analog zum vorherigen Beweis $\det(T|_{\mathcal{E}}) = \lambda_2\lambda_3 = 1$, somit ist $T|_{\mathcal{E}}$ eine Drehung von $\mathcal{E}$ und es gibt eine Basis $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ von $\mathcal{E}$, so dass T bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ die Matrix

$$T' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt, woraus die Behauptung des Satzes direkt folgt.

Wir wissen nun, dass es genau zwei Arten orthogonaler Transformationen eines dreidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V gibt: die Elemente in $\mathcal{SO}(V)$, die Drehungen einer Ebene, sowie jene in $\mathcal{O}(V) \setminus \mathcal{SO}(V)$, die Drehspiegelungen an einer Ebene. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir die näheren Eigenschaften endlicher Untergruppen von $\mathcal{SO}(V)$.

§2 Endliche Drehgruppen in drei Dimensionen

Satz. *(Lineare Fortsetzung ebener Drehungen / Spiegelungen zu räumlichen Drehungen)*
Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $W \subset V$ eine Ursprungsebene und $T \in \mathcal{O}(W)$. Dann existiert eine lineare Abbildung $\tilde{T} \in \mathcal{SO}(V)$ mit $\tilde{T}|_W = T$.

Beweis.
Ist T eine Drehung um θ,[2] definiere $\tilde{T}$ durch $\tilde{T}\mathbf{x} = \mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{x} \in W^\perp$ und $\tilde{T}\mathbf{x} = T\mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in W$. Dann ist $\tilde{T}$ eine Drehung um θ mit Rotationsachse $\mathbb{R} \cdot \mathbf{x}$ für ein $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in W^\perp$.
Unter Wahl einer geeigneten Orthonormalbasis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ lautet die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \det\tilde{T} = 1 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1.$$

Ist T eine Spiegelung, so definiere $\tilde{T}$ durch $\tilde{T}\mathbf{x} = -\mathbf{x}\ \forall\ \mathbf{x} \in W^\perp$ und $\tilde{T}\mathbf{x} = T\mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in W$. Dann ist $\tilde{T}$ eine Drehung um den Winkel π mit der Spiegelachse von T als Rotationsachse. Unter Wahl einer geeigneten Orthonormalbasis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ lautet die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \det\tilde{T} = -1 \cdot (-(\cos^2\theta + \sin^2\theta)) = 1.$$

In jedem Fall ist $\tilde{T}$ eine lineare Fortsetzung von T mit Determinante 1. $\square$

Definition. *(Zyklische Untergruppen und Diedergruppen in drei Dimensionen)*
Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $W \subset V$ eine Ursprungsebene.
Ist $\mathcal{C}_2^n$ die n-elementige zyklische Untergruppe von $\mathcal{O}(W)$, so sei $\mathcal{C}_3^n$ die Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$, die entsteht, wenn wir alle Elemente in $\mathcal{C}_2^n$ zu Drehungen aus $\mathcal{O}(V)$ fortsetzen.
Ist $\mathcal{H}_2^n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$ in W, so sei $\mathcal{H}_3^n$ die Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$, die entsteht, wenn wir alle Elemente in $\mathcal{H}_2^n$ zu Drehungen aus $\mathcal{O}(V)$ fortsetzen.
Interessant ist hierbei, dass C_3^2 und H_3^1 beide aus der Identitätsabbildung und einer Drehung um den Winkel π bestehen und somit geometrisch nicht zu unterscheiden sind.

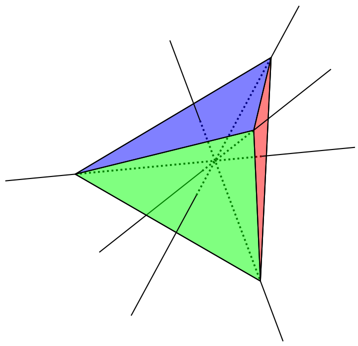
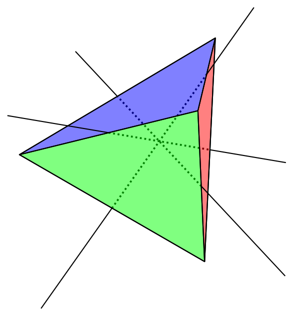
Da alle endlichen Drehgruppen $\mathcal{C}_2^n$ von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ genau die Gruppen jener Drehungen sind, unter denen regelmäßige n-Ecke invariant sind, untersuchen wir zunächst das dreidimensionale Analogon: die Drehgruppen, unter deren Elementen regelmäßige konvexe Polyeder invariant sind. Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall, in dem es unendlich viele regelmäßige n-Ecke gibt, gibt es jedoch nur fünf regelmäßige konvexe Polyeder, die *platonischen Körper*: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Aus diesen fünf Körpern gehen jedoch nur drei Drehgruppen hervor – denn Oktaeder und Würfel sowie Dodekaeder und Ikosaeder sind jeweils *dual* zueinander, das heißt: verbindet man alle Flächenmittelpunkte eines Würfels, erhält man ein Oktaeder und umgekehrt, somit bleiben diese Körper unter exakt denselben Drehungen des $\mathbb{R}^3$ invariant.

[2]bzw. eine Drehung um $-\theta$; die Drehrichtung hängt von der Orientierung der Ebene ab!

Die Drehgruppe des Tetraeders

Betrachte ein Tetraeder, dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Die Gruppe der Rotationen, unter denen das Tetraeder invariant ist, welche wir $\mathcal{T}$ nennen, besteht aus folgenden Elementen: Jeweils zwei Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ über die vier Achsen, die jeweils eine Ecke mit dem gegenüberliegenden Flächenmittelpunkt verbinden, jeweils eine Drehung um π über die drei Achsen, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten verbinden sowie die Identitätsabbildung. Somit gilt

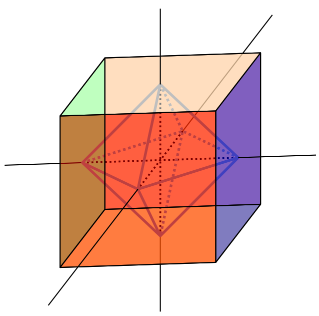
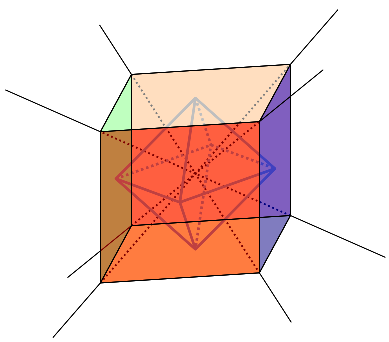
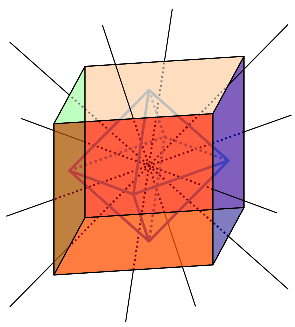
$$|\mathcal{T}| = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12.$$

Die Drehgruppe des Würfels (und des Oktaeders)

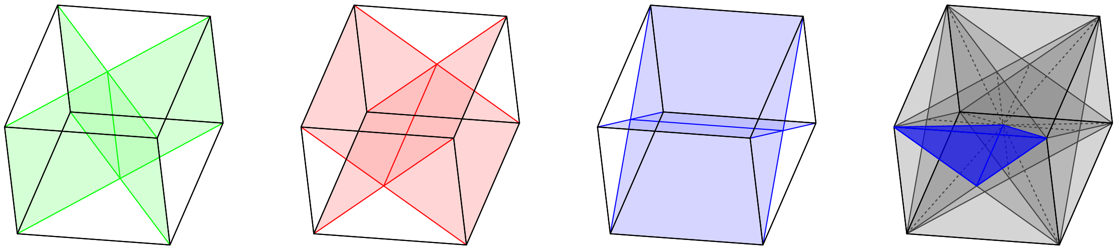
Betrachte einen Würfel, dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Die Gruppe der Rotationen, unter denen der Würfel invariant ist, welche wir $\mathcal{W}$ nennen, besteht aus folgenden Elementen: Jeweils drei Drehungen um $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$ über die drei Achsen, die zwei gegenüberliegende Flächenmittelpunkte verbinden, jeweils zwei Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ über die vier Achsen, die diagonal gegenüberliegende Ecken verbinden, jeweils eine Drehung um π über die sechs Achsen, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten verbinden sowie die Identitätsabbildung. Somit gilt

$$|\mathcal{W}| = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 1 = 24.$$

Fundamentalbereiche des Würfels bezüglich $\mathcal{W}$

Sei X die Vereinigung der Ebenen, welche die Flächendiagonalen des Würfels enthalten. Das Komplement von X im Würfel besteht aus 24 Zusammenhangskomponenten. Alle sind kongruente, relativ offene,[3] irreguläre Tetraeder.



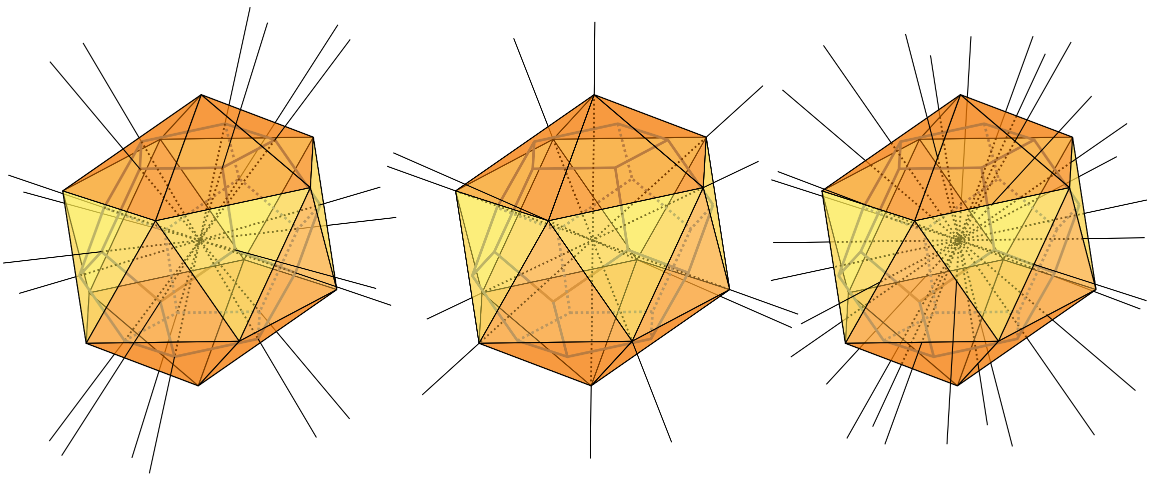
Diese Zusammenhangskomponenten sind *Fundamentalbereiche* des Würfels bezüglich $\mathcal{W}$, das heißt, nennen wir den Würfel $H \subset \mathbb{R}^3$, gilt für jede Zusammenhangskomponente F:

$$F \cap T(F) = \varnothing \ \forall \ T \in \mathcal{W} \setminus \{\mathrm{id}\} \text{ sowie } \bigcup_{T \in \mathcal{W}} \overline{T(F)} = H.$$

Die Drehgruppe des Ikosaeders (und des Dodekaeders)

Betrachte ein Ikosaeder, dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Die Gruppe der Rotationen, unter denen das Ikosaeder invariant ist, welche wir $\mathcal{J}$ nennen, besteht aus folgenden Elementen: Jeweils zwei Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ über die zehn Achsen, die zwei gegenüberliegende Flächenmittelpunkte verbinden, jeweils vier Drehungen um $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ und $\frac{8\pi}{5}$ über die sechs Achsen, die diagonal gegenüberliegende Ecken verbinden, jeweils eine Drehung um π über die fünfzehn Achsen, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten verbinden sowie die Identitätsabbildung. Somit gilt

$$|\mathcal{J}| = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 15 + 1 = 60.$$



[3] Man nennt U relativ offen in $A \subseteq \mathbb{R}^3$, falls eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $U = V \cap A$ existiert.

Pole und Stabilisatoren dreidimensionaler Drehgruppen

Definition. *(Pole einer Drehung)*
Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Nach dem Satz vom Fußball gibt es für jedes $T \in \mathcal{SO}(V) \setminus \{\mathrm{id}\}$ exakt zwei Fixpunkte auf der Einheitssphäre $\mathrm{S}^2 = \{\mathbf{x} \in V \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$, also $\mathbf{x} \in \mathrm{S}^2$ mit $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$ – die Schnittpunkte der Drehachse von T mit der Einheitssphäre. Diese nennen wir die *Pole* von T. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}(V)$ eine Untergruppe.
Wir bezeichnen die Menge der Pole von Drehungen ungleich der Identität mit

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in V \mid T\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ für ein } T \in \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V) \setminus \{\mathrm{id}\}\}.$$

Satz. *(Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ sind Permutationsgruppen der Pole)*
Für einen dreidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und eine Untergruppe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}(V)$ ist $\mathcal{G}$ eine Permutationsgruppe auf $\mathcal{S}$.

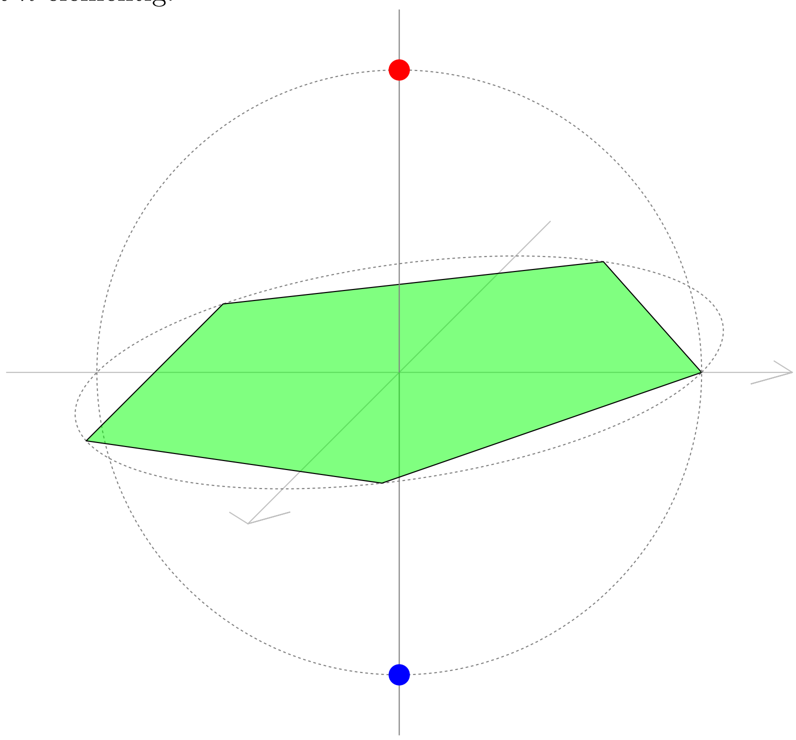
Ist $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, so existiert ein $T \in \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V) \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Für jedes $R \in \mathcal{G}$ gilt dann

$$(RTR^{-1})R\mathbf{x} = RT\mathbf{x} = R\mathbf{x},$$

somit ist $R\mathbf{x}$ ein Pol der Drehung[4] RTR^{-1} und es gilt $R\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. □

Pole und Stabilisatoren der zyklischen Gruppe $\mathcal{C}_3^n$

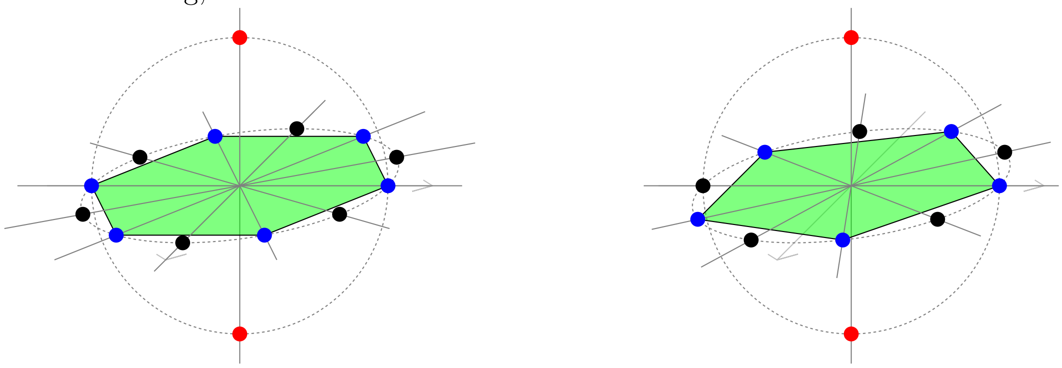
Jede zyklische Gruppe $\mathcal{C}_3^n$ besitzt genau zwei Pole, wobei kein $R \in \mathcal{C}_3^n$ den einen Pol auf den anderen abbildet, somit besitzt $\mathcal{S}$ zwei einelementige Bahnen und der Stabilisator jedes Pols ist n-elementig.



[4] R kann eine Drehung oder eine Spiegelung sein – in beiden Fällen ist $\det(RTR^{-1}) = (\det R)^2 \det T = 1$.

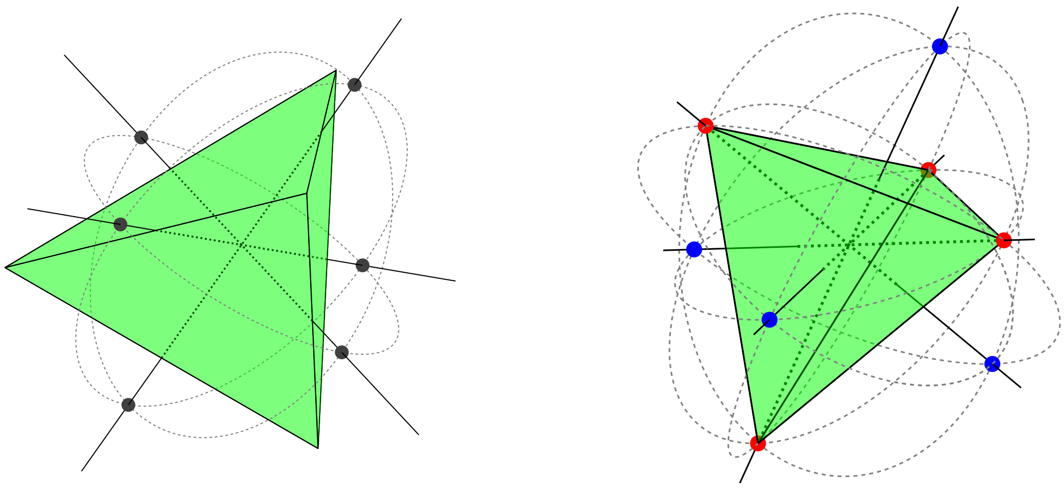
Pole und Stabilisatoren der Diedergruppe $\mathcal{H}_3^n$

Die Diedergruppe $\mathcal{H}_3^n$ besitzt n Drehachsen in der Ebene $\mathcal{E}$, auf der die Gruppe operiert sowie eine Drehachse senkrecht zu $\mathcal{E}$, somit besitzt $\mathcal{H}_3^n$ genau $|\mathcal{S}| = 2n + 2$ Pole.
Ist n gerade, so bildet die senkrechte Achse eine, die Ecken des regelmäßigen n-Ecks eine weitere und die Pole der Achsen durch die Kantenmittelpunkte eine dritte Bahn.
Ist n ungerade, so bildet die senkrechte Achse eine, die Ecken des regelmäßigen n-Ecks eine weitere und die den Ecken gegenüberliegenden Punkte eine dritte Bahn.
In jedem Fall besitzt $\mathcal{S}$ drei Bahnen und die Stabilisatoren der Elemente der ersten Bahn sind n-elementig, die Stabilisatoren der Elemente der anderen Bahnen sind 2-elementig.



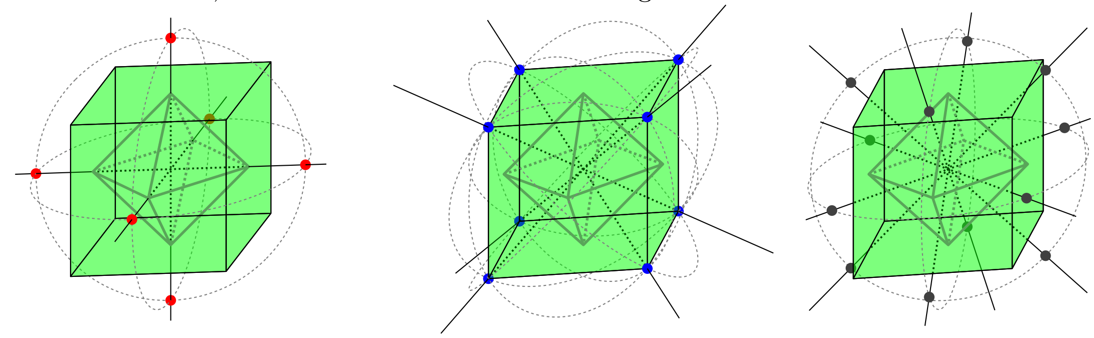
Pole und Stabilisatoren der Drehgruppe des Tetraeders $\mathcal{T}$

Die Drehgruppe des Tetraeders $\mathcal{T}$ besitzt vier Drehachsen durch die Ecken und ihre gegenüberliegenden Flächenmittelpunkte, sowie drei Drehachsen durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte; folglich besitzt $\mathcal{T}$ genau $|\mathcal{S}| = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$ Pole.
Die Pole auf den Achsen, die die Kantenmittelpunkte verbinden, bilden eine Bahn, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 2 haben, die Ecken und deren Antipoden bilden jeweils zwei weitere Bahnen, deren Elemente beide Stabilisatoren der Ordnung 3 haben.



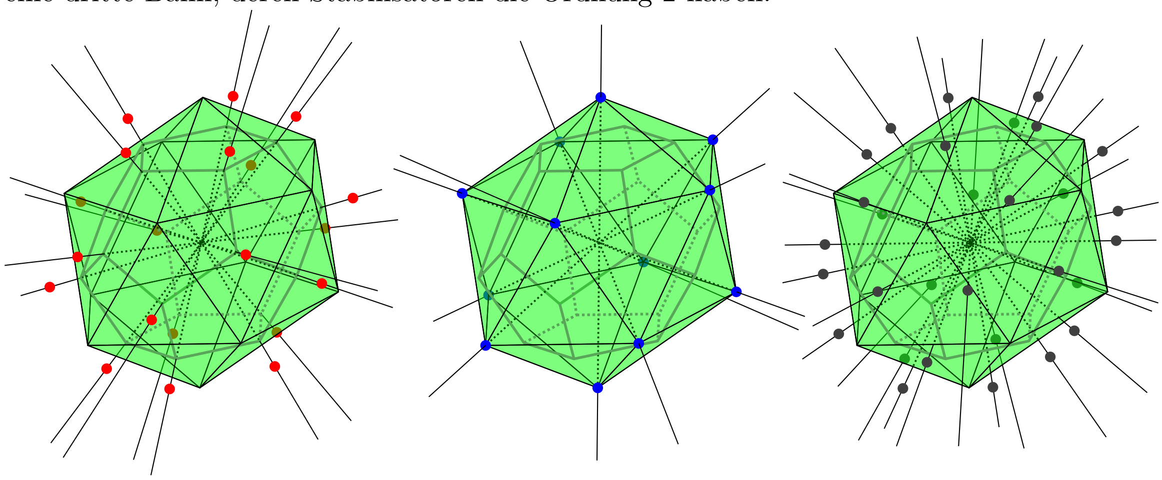
Pole und Stabilisatoren der Drehgruppe des Würfels $\mathcal{W}$

Die Drehgruppe des Würfels $\mathcal{W}$ besitzt drei Drehachsen durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte, vier Drehachsen durch gegenüberliegende Ecken, sechs Drehachsen durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte und besitzt somit $|\mathcal{S}| = (3+4+6) \cdot 2 = 26$ Pole. Die Pole auf den Achsen zwischen den Flächenmittelpunkten bilden eine Bahn, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 4 haben, die Pole auf den Achsen zwischen den gegenüberliegenden Ecken bilden eine weitere Bahn, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 3 haben und die Pole auf den Achsen zwischen den Kantenmittelpunkten bilden eine dritte Bahn, deren Stabilisatoren die Ordnung 2 haben.



Pole und Stabilisatoren der Drehgruppe des Ikosaeders $\mathcal{J}$

Die Drehgruppe des Ikosaeders $\mathcal{J}$ besitzt zehn Drehachsen durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte, sechs Drehachsen durch gegenüberliegende Ecken, 15 Drehachsen durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte, also $|\mathcal{J}| = (10 + 6 + 15) \cdot 2 = 62$ Pole. Die Pole auf den Achsen zwischen den Flächenmittelpunkten bilden eine Bahn, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 3 haben, die Pole auf den Achsen zwischen den gegenüberliegenden Ecken bilden eine weitere Bahn, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 5 haben und die Pole auf den Achsen zwischen den Kantenmittelpunkten bilden eine dritte Bahn, deren Stabilisatoren die Ordnung 2 haben.



Klassifizierung endlicher dreidimensionaler Drehgruppen

Satz. *(Klassifizierung endlicher dreidimensionaler Drehgruppen)*
Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{SO}(V)$ eine endliche Drehgruppe. Dann ist $\mathcal{G}$ genau eine der Gruppen $\mathcal{C}_3^n$, $\mathcal{H}_3^n$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{J}$.

Beweis.
Sei $\mathcal{S}$ die zugehörige Polmenge und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{SO}(\mathcal{V}) \times \mathcal{S}$ die Menge aller Paare $(T, \mathbf{x})$, wobei $T \in \mathcal{G} \setminus \{\mathrm{id}\}$ und $\mathbf{x}$ ein Pol von T sei. Sei $n := |\mathcal{G}|$ und für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ sei $r_{\mathbf{x}} := |\mathcal{G}\mathbf{x}|$, $n_{\mathbf{x}} := |\operatorname{Stab}(\mathbf{x})|$. Wie wir aus der linearen Algebra wissen, ist $n = n_{\mathbf{x}} r_{\mathbf{x}}\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Da jede Drehung $T \neq \mathrm{id}$ genau zwei Pole hat, gilt offenbar $|\mathcal{U}| = 2(n-1)$. Andererseits muss $|\mathcal{U}|$ jedoch auch die Summe der Anzahl der Paare $(T, \mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ über alle $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ sein. Sind $S_1, \ldots, S_k$ die Bahnen in $\mathcal{S}$, so können wir offenbar Pole $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ mit $\mathbf{x}_i \in S_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ wählen. Wir setzen $n_i := n_{\mathbf{x}_i}$ und $r_i := r_{\mathbf{x}_i}$. Da trivialerweise $n_{\mathbf{x}} = n_i$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}\mathbf{x}_i$ gilt, folgt aus $n = n_{\mathbf{x}} r_{\mathbf{x}}$, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}\mathbf{x}_i$ ebenso $r_{\mathbf{x}_i} = r_i$ gilt. Folglich:

$$2n - 2 = |\mathcal{U}| = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} (n_{\mathbf{x}} - 1) = \sum_{i=1}^{k} r_i(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} (n - r_i).$$

Wir teilen die linke und die rechte Seite der Gleichung nun durch n:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{r_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right).$$

Da $n = 1 \ \Rightarrow\ \mathcal{G} = \{\mathrm{id}\} \ \Rightarrow\ \mathcal{S} = \varnothing$ gilt, dürfen wir $n > 1$ annehmen. Nun gilt:

$$1 \leq 2 - \frac{2}{n} = \frac{|\mathcal{U}|}{n} < 2.$$

Da für jedes $(T, \mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ offenbar $\{T, \mathrm{id}\} \subseteq \operatorname{Stab}(\mathbf{x})$ gilt, ist $n_i \geq 2\ \forall\ 1 \leq i \leq k$. Somit:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n_i} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2} \leq \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{|\mathcal{U}|}{n} < k.$$

Die Annahmen $k = 1$ oder $k \geq 4$ führen offenbar zum Widerspruch, somit ist $k \in \{2, 3\}$.
Im Fall $k = 2$ gilt

$$2 - \frac{2}{n} = 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} = r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 1,\ n_1 = n_2 = n.$$

$\mathcal{G}$ besitzt dann nur eine Drehachse und ist somit eine zyklische Gruppe $\mathcal{C}_3^n$.
Im Fall $k = 3$ sei zunächst o.B.d.A. $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Die Annahme $n_1 \geq 3$ führt zu

$$\frac{|\mathcal{U}|}{n} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$$

und somit zum Widerspruch. Folglich ist $n_1 = 2 \ \Rightarrow\ r_1 = n/2$, daraus folgt

$$2 - \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{n_2}) + (1 - \frac{1}{n_3}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}.$$

Nun gilt $n_2 \in \{2, 3\}$, denn die Annahme $n_2 \geq 4$ impliziert den Widerspruch

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{2}.$$

Im Fall $n_2 = 2$ gilt $r_2 = n/2$ sowie

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n_3} \quad \Rightarrow \quad n_3 = \frac{n}{2} = \frac{n_3 r_3}{2} \quad \Rightarrow \quad r_3 = 2.$$

Sei $m := n/2$. Die Pole in einer der beiden m-elementigen Bahnen spannen offenbar ein regelmäßiges m-Eck auf, welches unter $\mathcal{G}$ invariant ist, somit ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}_3^m$. Da jedoch andererseits auch $|\mathcal{G}| = n + 2 = 2m + 2 = |\mathcal{H}_3^m|$ ist, ist $\mathcal{G}$ genau die Diedergruppe $\mathcal{H}_3^m$.

Im Fall $n_2 = 3 \;\Rightarrow\; r_2 = n/3$ muss $n_3 \in \{3, 4, 5\}$ sein, denn $n_3 \geq 6$ anzunehmen impliziert

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n} \leq 0.$$

Im Fall $n_3 = 3 \;\Rightarrow\; r_3 = n/3$ gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad n = 12 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 6,\ r_2 = r_3 = 4$$

und die Pole in einer der beiden 4-elementigen Bahnen spannen ein regelmäßiges Tetraeder auf, welches unter $\mathcal{G}$ invariant ist, somit ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$. Andererseits ist jedoch $|\mathcal{G}| = 12 = |\mathcal{T}|$, somit gilt die Gleichheit, also ist $\mathcal{G}$ die Drehgruppe des Tetraeders $\mathcal{T}$.

Im Fall $n_3 = 4 \;\Rightarrow\; r_3 = n/4$ gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{2}{n} = \frac{1}{12} \;\Rightarrow\; n = 24 \;\Rightarrow\; r_1 = 12,\ r_2 = 8,\ r_3 = 6,$$

und die Pole in der 6-elementigen Bahn spannen ein regelmäßiges Hexaeder, also einen Würfel auf, der unter $\mathcal{G}$ invariant ist, somit ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{W}$. Andererseits ist $|\mathcal{G}| = 6 = |\mathcal{W}|$, somit gilt die Mengengleichheit, also ist $\mathcal{G}$ genau die Drehgruppe des Würfels $\mathcal{W}$.

Im Fall $n_3 = 5 \;\Rightarrow\; r_3 = n/5$ gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; \frac{2}{n} = \frac{1}{30} \;\Rightarrow\; n = 60 \;\Rightarrow\; r_1 = 30,\ r_2 = 20,\ r_3 = 12$$

und die Pole in der 12-elementigen Bahn spannen ein regelmäßiges Ikosaeder auf, das unter $\mathcal{G}$ invariant ist, somit ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{J}$. Da jedoch auch $|\mathcal{G}| = 60 = |\mathcal{J}|$ gilt, sind die beiden Mengen gleich und $\mathcal{G}$ ist genau die Drehgruppe des Ikosaeders $\mathcal{J}$.

Zusammengefasst ist $\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 1$; $\mathcal{H}_3^n$, $n \geq 2$; $\mathcal{T}$; $\mathcal{W}$; $\mathcal{J}$ eine vollständige Aufzählung aller endlichen Untergruppen der Drehgruppe eines dreidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums. $\square$

§3 Endliche Transformationsgruppen in drei Dimensionen

Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Die Gruppe $\mathcal{W}^*$ der orthogonalen Transformationen, unter denen ein Würfel invariant ist, ist größer als $\mathcal{W}$: betrachte beispielsweise $T\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Dies ist eine orthogonale Transformation, unter der der Würfel invariant ist, jedoch ist $\det T = -1 \Rightarrow T \notin \mathcal{W} \subset \mathcal{SO}(V)$. Ist jedoch $T \in \mathcal{W}^* \setminus \mathcal{W}$, so gilt stets $\det T = -1 \Rightarrow \det(-T) = 1 \Rightarrow -T \in \mathcal{W}$.
Diese Beobachtung lässt sich verallgemeinern:

Satz. *(Die Menge aller Drehungen in einer Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$ ist ein Normalteiler)*
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}(V)$ eine Untergruppe und ist $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V)$, so ist $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ oder $\operatorname{ind}_{\mathcal{H}} \mathcal{G} = 2$. In jedem Fall ist $\mathcal{H}$ normal in $\mathcal{G}$.

Beweis.
Für $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{SO}(V)$ ist $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ und die Aussage über die Normalität trivial. Sei $\mathcal{G} \not\subseteq \mathcal{SO}(V)$. Dann existiert ein $T \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$. Für jedes $S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ gilt $\det(T^{-1}S) = (-1)^2 = 1$, folglich ist $T^{-1}S \in \mathcal{H} \Rightarrow S \in T\mathcal{H}$. Somit ist $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup T\mathcal{H} \Rightarrow \operatorname{ind}_{\mathcal{H}} \mathcal{G} = 2$ und $\mathcal{H}$ normal in $\mathcal{G}$.□

Folgerung. *(Der dreidimensionale Fall)*
Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ wie oben und sei $\operatorname{ind}_{\mathcal{H}} \mathcal{G} = 2$. Ist $-1 \in \mathcal{G}$, so ist G die Vereinigung von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^- := \{-T \mid T \in \mathcal{H}\}$. Andererseits ist, falls $\mathcal{H}$ eine beliebige Drehgruppe in $\mathcal{O}(V)$ ist, $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}^-$ eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$, deren Untergruppe von Drehungen genau $\mathcal{H}$ ist, denn es gilt

$$(\mathcal{H} \cup \mathcal{H}^-) \cap \mathcal{SO}(V) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{SO}(V)) \cup (\mathcal{H}^- \cap \mathcal{SO}(V)) = \mathcal{H} \cup \varnothing = \mathcal{H}.$$

Ist $-1 \notin \mathcal{G}$, sei $R\mathcal{H}$ die Faktorgruppe, die ungleich $\mathcal{H}$ ist. Wäre $R^2 \in R\mathcal{H}$, so wäre $R \in \mathcal{H}$, im Widerspruch zu $R\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$, somit ist $R^2 \in \mathcal{H}$. Da $\mathcal{H}$ normal in $\mathcal{G}$ ist, gilt $(-R\mathcal{H})(-R\mathcal{H}) = R^2\mathcal{H} = \mathcal{H}$ sowie $\mathcal{H}(-R\mathcal{H}) = -R\mathcal{H}$. Die Menge $\mathcal{K} := \mathcal{H} \cup (-R)\mathcal{H}$ ist dann eine Drehgruppe, in der $\mathcal{H}$ eine Untergruppe vom Index 2 ist, denn es gilt

$$R \notin \mathcal{H} \Rightarrow \det(R) = -1 \Rightarrow \det(-R) = 1 \Rightarrow \det(-RT) = 1^2 = 1 \;\forall\, T \in \mathcal{H}.$$

Sei andererseits $\mathcal{K}$ eine beliebige Drehgruppe mit $\mathcal{H}$ als Untergruppe und $\operatorname{ind}_{\mathcal{K}} \mathcal{H} = 2$. Dann ist $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup \{-S \mid S \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}\}$ eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$ mit $\mathcal{G} \cap \mathcal{SO}(V) = \mathcal{H}$, denn da $\operatorname{ind}_{\mathcal{K}} \mathcal{H} = 2$ ist, existiert ein $T \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}$ mit $\mathcal{K} = \mathcal{H} \dot\cup T\mathcal{H} \Rightarrow T\mathcal{H} = \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}$, somit

$$S \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{H} = \mathcal{H} \Rightarrow \exists R \in \mathcal{H} : S = TR \Rightarrow -S = -TR \Rightarrow -S \in (-T\mathcal{H}),$$

folglich ist $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup (-T\mathcal{H})$ und es gilt

$$T\mathcal{H} \neq \mathcal{H} \Rightarrow T^2 \in \mathcal{H} \Rightarrow (-T\mathcal{H})(-T\mathcal{H}) = T^2\mathcal{H} = \mathcal{H},\; \mathcal{H}(-T\mathcal{H}) = -T\mathcal{H}.$$

Somit können wir alle endlichen Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$ klassifizieren:
Die erste Klasse sind Drehgruppen, die zweite Klasse besteht aus Gruppen, die entstehen, wenn man eine Gruppe $\mathcal{H}$ aus der ersten Klasse wählt und sie mit $\{-T \mid T \in \mathcal{H}\}$ vereinigt, die dabei enstehende Gruppe schreiben wir $\mathcal{H}^*$, sowie die dritte Klasse der Gruppen $\mathcal{K}]\mathcal{H} := \mathcal{H} \cup \{-T \mid T \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{H}\}$ wobei $\mathcal{K}$ aus der ersten Klasse und $\mathcal{H}$ eine Untergruppe vom Index 2 ist. Insbesondere gehört $\mathcal{G}$ genau dann zur zweiten Klasse, wenn $-1 \in \mathcal{G}$ ist bzw. genau dann zur dritten Klasse, wenn $\mathcal{G}$ nicht zur ersten Klasse gehört, aber $-1 \notin \mathcal{G}$.

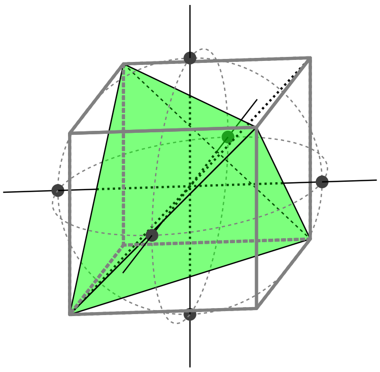
Satz. *(Jede Untergruppe vom Index 2 enthält die Quadrate aller Elemente)*
Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe und $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}$ eine Untergruppe mit $\operatorname{ind}_{\mathcal{G}} \mathcal{N}=2$.
Dann ist $\mathcal{G}^2 := \langle\{g^2 \mid g \in \mathcal{G}\}\rangle \subseteq \mathcal{N}$.

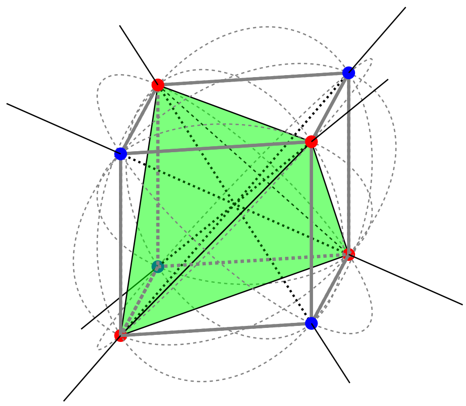
Beweis.
Jede Untergruppe vom Index 2 ist normal, somit können wir die Faktorgruppe $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ betrachten. Diese hat Ordnung 2 und somit folgt nach dem kleinen Satz von Fermat[5]:

$$[\forall\, g \in \mathcal{G}:\ \ \mathcal{N} = \mathrm{id}_{\mathcal{G}/\mathcal{N}} = (g\mathcal{N})(g\mathcal{N}) = gg\mathcal{N}\mathcal{N} = g^2\mathcal{N} \ \Rightarrow\ g^2 \in \mathcal{N}] \ \Rightarrow\ \{g^2 \,|\, g \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{N}.$$

Da die von einer Menge M erzeugte Untergruppe in jeder Gruppe enthalten ist, die M enthält, folgt sofort die Behauptung $\mathcal{G}^2 \subseteq \mathcal{N}$. □

Folgerung 1. *($\mathcal{T}$ ist die einzige Untergruppe vom Index 2 in $\mathcal{W}$)*
Sei $\mathcal{W}^2 = \{T^2 \mid T \in \mathcal{W}\}$ die von Quadraten erzeugte Untergruppe. Die Quadrate der Elemente sind genau die Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ über gegenüberliegende Ecken, die Drehungen um π über gegenüberliegende Flächenmittelpunkte und die Identität.





Aufgrund der Disjunktheit der Bahnen sind dies bereits alle Elemente von $\mathcal{W}^2$, also gilt

$$|\mathcal{W}^2| = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12 \ \Rightarrow\ \operatorname{ind}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}^2) = \frac{|\mathcal{W}|}{|\mathcal{W}^2|} = \frac{24}{12} = 2.$$

Da für jede Untergruppe $\mathcal{N}$ vom Index 2 offenbar $|\mathcal{N}| = 12$ und $\mathcal{W}^2 \subseteq \mathcal{N}$ gilt, ist $\mathcal{N} = \mathcal{W}^2$ bereits eindeutig bestimmt, $\mathcal{W}^2$ also die einzige Untergruppe vom Index 2. Andererseits bilden die Pole der Drehungen über gegenüberliegende Flächenmittelpunkte eine Bahn, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 2 haben; die Pole der Drehungen über gegenüberliegende Ecken bilden zwei Bahnen, deren Elemente Stabilisatoren der Ordnung 3 haben, also gilt nach dem Klassifizierungssatz $\mathcal{W}^2 = \mathcal{T}$. □

Folgerung 2a. *(Untergruppen vom Index 2 enthalten alle Elemente ungerader Ordnung)*
Seien $\mathcal{G}, \mathcal{G}^2, \mathcal{N}$ wie oben und $g \in \mathcal{G}$ mit ungerader Ordnung m. Dann ist $g \in \mathcal{N}$, denn

$$2 \nmid m \ \Rightarrow\ 2 \mid (m{+}1) \ \Rightarrow\ g = e{\cdot}g = g^m g = g^{m+1} = \left(g^{(m+1)/2}\right)^2 \in \mathcal{G}^2 \subseteq \mathcal{N}.$$ □

[5] Der *kleine Satz von Fermat* besagt, dass in einer Gruppe $\mathcal{G}$ der Ordnung $n < \infty$ gilt: $g^n = e \ \forall\, g \in \mathcal{G}$.

Folgerung 2b. *(Nichtexistenz von Untergruppen vom Index 2 in $\mathcal{T}$ und $\mathcal{J}$)*
Da $\mathcal{T}$ 9 und $\mathcal{J}$ 45 Elemente ungerader Ordnung besitzen, gilt $|\mathcal{T}^2| \geq 9,\ |\mathcal{J}^2| \geq 45$. Nach dem Satz von Lagrange sind $|\mathcal{T}^2|$ bzw. $|\mathcal{J}^2|$ jedoch Teiler von $|\mathcal{T}| = 12$ bzw. $|\mathcal{J}| = 60$. Es folgt $|\mathcal{T}^2| = 12 \Rightarrow \mathcal{T}^2 = \mathcal{T}$ und $|\mathcal{J}^2| = 60 \Rightarrow \mathcal{J}^2 = \mathcal{J}$, also $\operatorname{ind}_{\mathcal{T}} \mathcal{T}^2, \operatorname{ind}_{\mathcal{J}} \mathcal{J}^2 < 2$. □

Folgerung 3. *(Untergruppen vom Index 2 in $\mathcal{C}_3^n$)*
Für ungerade n besitzt $\mathcal{C}_3^n$ keine Untergruppen vom Index 2.
Für gerade n ist $\mathcal{C}_3^{n/2}$ die einzige Untergruppe vom Index 2 in $\mathcal{C}_3^n$.

Beweis.
Wie wir wissen, gilt $\mathcal{C}_3^n = \langle R \rangle = \{\mathrm{id}, R, R^2, \ldots, R^{n-1}\}$ für ein $R \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. Ist $|\mathcal{C}_3^n| = n$ ungerade, kann $\mathcal{C}_3^n$ nach dem Satz von Lagrange keine Untergruppen vom Index 2 besitzen. Ist $|\mathcal{C}_3^n| = n$ gerade, so gilt $(\mathcal{C}_3^n)^2 = \langle R^2 \rangle = \{\mathrm{id}, R^2, R^4, \ldots, R^{n-2}\}$ und somit $|(\mathcal{C}_3^n)^2| = \frac{n}{2}$. Einerseits ist $(\mathcal{C}_3^n)^2$ eine Untergruppe vom Index 2, andererseits muss jedoch jede Untergruppe vom Index 2 auch $(\mathcal{C}_3^n)^2$ enthalten, also ist $(\mathcal{C}_3^n)^2$ die einzige solche Untergruppe. Mit $S := R^2$ ist nun offenbar $(\mathcal{C}_3^n)^2 = \langle S \rangle = \{\mathrm{id}, S, S^2, \ldots, S^{(n/2)-1}\} = \mathcal{C}_3^{n/2}$. □

Folgerung 4. *(Untergruppen vom Index 2 in $\mathcal{H}_3^n$)*
$\mathcal{C}_3^n$ ist eine Untergruppe vom Index 2 in $\mathcal{H}_3^n$. Für ungerade n ist dies die einzige solche Untergruppe, für gerade n hingegen ist $\mathcal{H}_3^{n/2}$ eine weitere Untergruppe vom Index 2.

Beweis.
Wie wir wissen, gilt $\mathcal{H}_3^n = \langle R, S \rangle$, wobei R eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ mit Drehachse senkrecht zu einer bestimmten Ebene W ist und S eine Drehung um π mit Drehachse in W ist. Bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis lautet die Matrix von $SRS^{-1} = SRS$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ 0 & \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\frac{2\pi}{n}) & -\sin(-\frac{2\pi}{n}) \\ 0 & \sin(-\frac{2\pi}{n}) & \cos(-\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix},$$

womit offenbar SRS^{-1} eine Drehung um $\frac{-2\pi}{2}$ um dieselbe Drehachse wie R, also R^{-1} ist. Somit folgt $(\mathcal{H}_3^n)^2 = \langle R^2 \rangle$. Nach Folgerung 2a gilt für ungerade n: $\langle R^2 \rangle = \langle R \rangle$, somit hat $(\mathcal{H}_3^n)^2$ genau $n = \frac{|\mathcal{H}_3^n|}{2}$ Elemente und ist die einzige Untergruppe vom Index 2 in $\mathcal{H}_3^n$. Für gerade n hat $\langle R^2 \rangle$ Index 4 in $\mathcal{H}_3^n$ und wir überlegen, welche Elemente wir hinzunehmen müssen, um eine der Untergruppen vom Index 2 zu erhalten. Wir sehen schnell, dass nur eins der Elemente[6] R, S und SR hinzugefügt werden kann, da Hinzufügen zweier dieser Elemente bereits ganz $\mathcal{H}_3^n$ erzeugt, denn $\langle \langle R^2 \rangle \cup \{R, S\} \rangle = \langle R, S \rangle = \mathcal{H}_3^n$; ebenso muss bei Einfügen von R und SR auch $(SR)R^{-1} = S$ und somit $\langle R, S \rangle$ enthalten sein und selbiges gilt auch für S und SR, im welchem Fall $S(SR) = R$ enthalten wäre. Betrachten wir die drei Fälle – nehmen wir R hinzu, erhalten wir $\langle R^2, R \rangle = \langle R \rangle = \mathcal{C}_3^n$; bei Hinzufügen von S erhalten wir $\langle R^2, S \rangle = \{\mathrm{id}, R^2, \ldots, R^{n-2}, S, SR^2, \ldots, SR^{n-2}\} = \mathcal{H}_3^{n/2}$ und SR hinzuzufügen, ergibt $\langle R^2, SR \rangle$, wobei auch hier R^2 eine Drehung um $\frac{4\pi}{n}$ und RS eine Spiegelung ist, womit auch diese Untergruppe die Diedergruppe $\mathcal{H}_3^{n/2}$ darstellt. □

[6] RS ist ausgelassen, da hierdurch dieselbe Untergruppe wie bei Hinzufügen von SR erzeugt wird, denn $SR^nS = R^{-n} \Rightarrow R^nS = SR^{-n}$ und eine Untergruppe, die R^n enthält, muss auch R^{-n} enthalten.

Klassifizierung endlicher dreidimensionaler Gruppen orthogonaler Transformationen

Satz. *(Klassifizierung endlicher dreidim. Gruppen orthogonaler Transformationen)* Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Fassen wir alle Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen, ist dies eine komplette Auflistung aller endlicher Untergruppen von $\mathcal{O}(V)$:

Erste Klasse: $\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 1$, $\mathcal{H}_3^n$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{J}$.
Zweite Klasse: $(\mathcal{C}_3^n)^*$, $n \geq 1$, $(\mathcal{H}_3^n)^*$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}^*$, $\mathcal{W}^*$, $\mathcal{J}^*$.
Dritte Klasse: $\mathcal{C}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 1$, $\mathcal{H}_3^n]\mathcal{C}_3^n$, $n \geq 2$, $\mathcal{H}_3^{2n}]\mathcal{H}_3^n$, $n \geq 2$, $\mathcal{W}]\mathcal{T}$.

Bemerke, dass diese Liste keine Redundanzen enthält – einige der Gruppen sind zwar als algebraische Gruppen isomorph, aber geometrisch verschieden: So sind $\mathcal{C}_3^2$, $(C_3^1)^*$, $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$ zwar allesamt isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, jedoch sind die jeweiligen Elemente der Ordnung 2 eine Drehung, eine Punktspiegelung durch den Ursprung und eine Ebenenspiegelung. Wir betrachten zwei Untergruppen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ des $\mathcal{O}(V)$ nur dann als geometrisch gleich, wenn eine orthogonale Transformation $T \in \mathcal{O}(V)$ mit $T^{-1}\mathcal{G}_1 T = \mathcal{G}_2$ existiert. Bezüglich geeigneter Basen besitzen die Elemente ungleich der Identität von $\mathcal{C}_3^2$, $(\mathcal{C}_3^1)^*$, $\mathcal{C}_3^2]\mathcal{C}_3^1$ die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und sind somit mit unterschiedlichen Jordan-Normalformen geometrisch verschieden.