Wie rechne ich mit Ungleichungen?

Die *“do”*s und *“don’t”*s mit Beispielen aus der Miniklausur

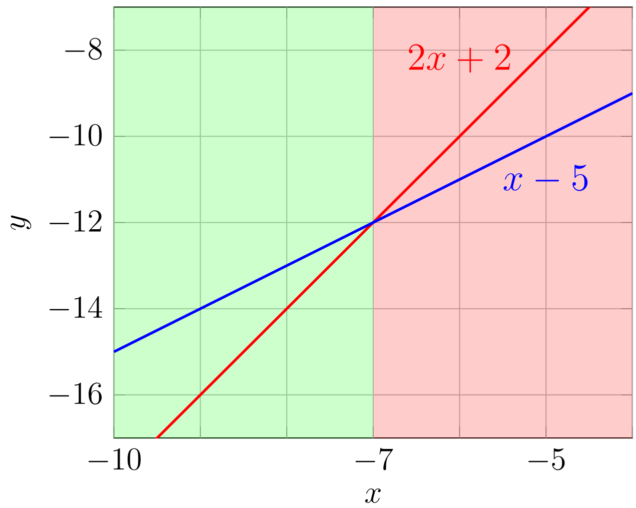
Lukas Steenvoort

Addition (und Subtraktion[1])

Dies funktioniert ähnlich wie bei Gleichungen – addieren wir denselben Ausdruck auf beiden Seiten, ist dies eine Äquivalenzumformung der Ungleichung, verändert ihren Wert also nicht.

$$\boxed{x - 5 > 2x + 2}$$

$$\begin{aligned} & x - 5 &>& \; 2x + 2 && \mid -2 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 7 &>& \; 2x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & -7 &>& \; x && \end{aligned}$$



Multiplikation (und Division[2])

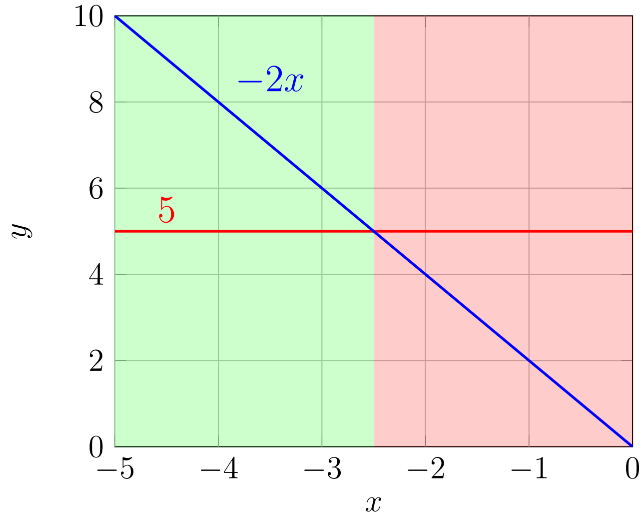
Hier ist Vorsicht geboten – multiplizieren wir beide Seiten mit derselben positiven Zahl, ändert sich die Richtung des Ungleichheitszeichens nicht. Multiplikation mit einer negativen Zahl hingegen dreht das Ungleichheitszeichen um! Multiplizieren wir mit einem Ausdruck, dessen Vorzeichen wir nicht kennen, müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen!

$$\boxed{-2x > 5}$$

$$\begin{aligned} & -2x &>& \; 5 && \mid : (-2) \\ \Leftrightarrow \quad & x &<& \; -\tfrac{5}{2} && \end{aligned}$$

ANDERE MÖGLICHKEIT:

$$\begin{aligned} & -2x &>& \; 5 && \mid +2x - 5 \\ \Leftrightarrow \quad & -5 &>& \; 2x && \mid : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -\tfrac{5}{2} &>& \; x && \end{aligned}$$



[1] Subtraktion von x ist nichts anderes als Addition von $-x$.

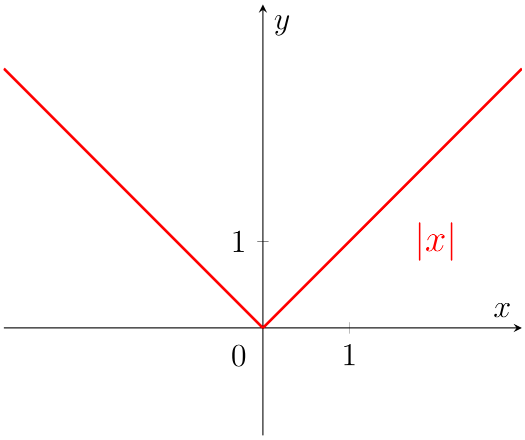
[2] Division durch x ist nichts anderes als Multiplikation mit $\frac{1}{x}$.

Beträge

Eine kurze Erinnerung an die Definition der Betragsfunktion:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

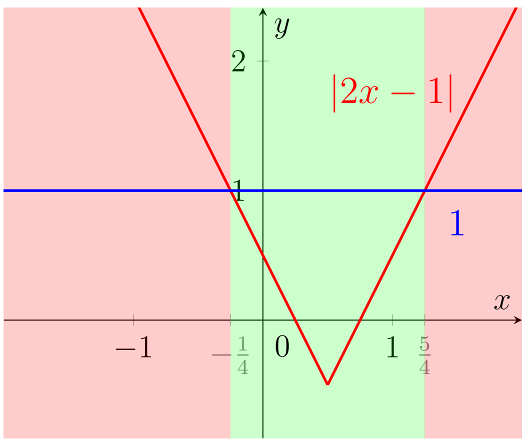
Der Betrag von $x \in \mathbb{R}$ ist stets nichtnegativ und ist der Abstand der Zahl x zur Zahl 0 auf der reellen Zahlengerade bzw. weniger formell ausgedrückt die Zahl, die herauskommt, wenn bei x das Vorzeichen wegfällt.



Für den Betrag sollte man sich merken: $|x| < y \;\Leftrightarrow\; -y < x < y \;\Leftrightarrow\; (-y < x \;\wedge\; x < y)$.

$$\boxed{|2x-1| - \tfrac{1}{2} < 1}$$

$$\begin{array}{llcll}
 & |2x-1| - \frac{1}{2} & < & 1 & \mid +\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & |2x-1| & < & \frac{3}{2} & \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{r} 2x-1 \\ \text{und } -\frac{3}{2} \end{array} \right. & \begin{array}{c} < \\ < \end{array} & \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ 2x-1 \end{array} & \begin{array}{l} \mid +1 \\ \mid +1 \end{array} \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{r} 2x \\ \text{und } -\frac{1}{2} \end{array} \right. & \begin{array}{c} < \\ < \end{array} & \begin{array}{l} \frac{5}{2} \\ 2x \end{array} & \begin{array}{l} \mid :2 \\ \mid :2 \end{array} \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{r} x \\ \text{und } -\frac{1}{4} \end{array} \right. & \begin{array}{c} < \\ < \end{array} & \begin{array}{l} \frac{5}{4} \\ x \end{array} &
\end{array}$$



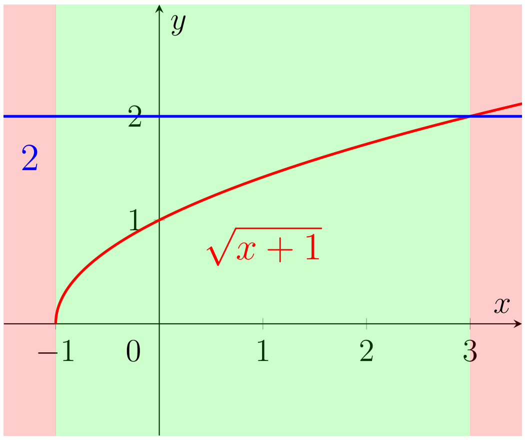
Quadrate und Wurzeln, Teil 1: Quadratwurzeln

Auch hier ist deutlich mehr Vorsicht geboten als beim Umgang mit Gleichungen. Zunächst sei angemerkt, dass Ausdrücke unter Quadratwurzeln nur dann ausgewertet werden können, wenn sie nichtnegativ sind. „Was ist mit den komplexen Zahlen? Wir haben doch gelernt, dass $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ ist“, mögen manche nun denken. Leider ist dies nicht so einfach. Wenn wir Gleichungen über den komplexen Zahlen lösen, ist $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ natürlich vollkommen plausibel. Leider funktioniert dieser Ansatz bei Ungleichungen nicht. Der Grund dafür ist recht simpel: Ungleichungen machen nur dann Sinn, wenn auf beiden Seiten Elemente eines angeordneten Körpers stehen. Die reellen Zahlen sind ein Beispiel für einen solchen Körper. Wir können stets zwei reelle Zahlen vergleichen und entscheiden, welche von beiden die größere ist. Auf den komplexen Zahlen existiert jedoch keine solche Ordnung. Die Frage „Welche Zahlen sind größer als i?“ ergibt keinen Sinn, da die komplexen Zahlen sich nicht anordnen lassen. Dies bitte nicht falsch verstehen – es gibt durchaus Ungleichungen, in denen Ausdrücke mit komplexen Zahlen vorkommen; jedoch nur dann, wenn die Auswertung dieser Ausdrücke reelle Zahlen ergibt. Ist beispielsweise $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Zahl, so können die Ausdrücke $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$ oder $\mathrm{Im}(z)$ beispielsweise in einer Ungleichung auftreten – sie sind nämlich reell. Hingegen darf eine Ungleichung wie $z < 5$ nicht formuliert werden – sie ergibt keinen Sinn.

Zurück zum ursprünglichen Thema – wie löse ich Ungleichungen mit Quadratwurzeln? Wir sollten uns daran erinnern, dass $x^2 < y^2 \;\Leftrightarrow\; x < y$ nur für nichtnegative x und y gilt. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt allgemein nur $x^2 < y^2 \;\Leftrightarrow\; |x| < |y|$. Wir müssen also vorsichtig sein, wenn wir versuchen, aus beiden Seiten der Ungleichung die Quadratwurzel zu ziehen! Aber besprechen wir eins nach dem anderen – zunächst: Ungleichungen der Form $\sqrt{x} < y$ liefern uns zwei Einschränkungen: einerseits muss $x < y^2$ sein, andererseits aber auch $x \geq 0$.

$$\boxed{\sqrt{x+1} < 2}$$

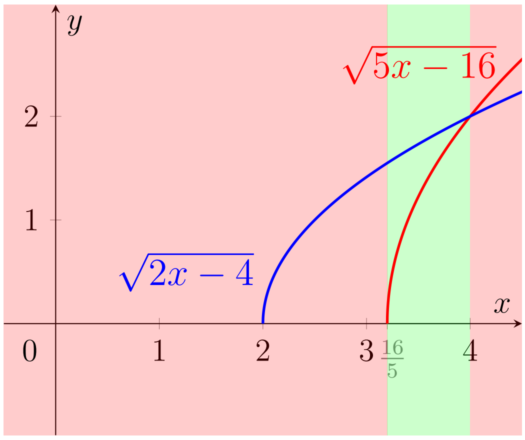
$$\begin{aligned}
& \sqrt{x+1} < 2 \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} x+1 < 2^2 & \\ \text{und}\quad x+1 \geq 0 & \mid -1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} x+1 < 4 & \mid -1 \\ \text{und}\quad x \geq -1 & \end{cases} \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} x < 3 \\ \text{und}\quad x \geq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$



Ähnlich gehen wir bei Ungleichungen mit Quadratwurzeln auf beiden Seiten vor:

$$\boxed{\sqrt{5x-16} < \sqrt{2x-4}}$$

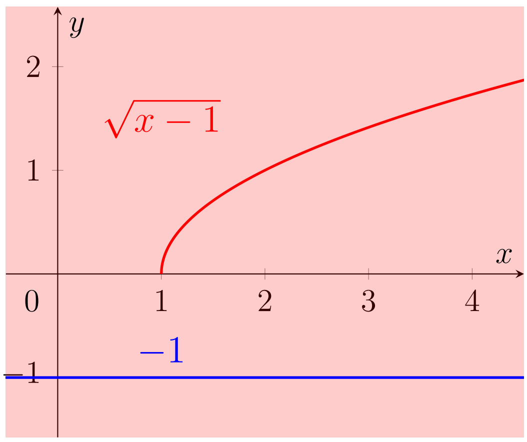
$$\begin{aligned}
& \sqrt{5x-16} < \sqrt{2x-4} \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} 5x-16 < 2x-4 & \mid +16 \mid -2x \\ \text{und}\quad 5x-16 \geq 0 & \mid +16 \\ \text{und}\quad 2x-4 \geq 0 & \mid +4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} 3x < 12 & \mid :3 \\ \text{und}\quad 5x \geq 16 & \mid :5 \\ \text{und}\quad 2x \geq 4 & \mid :2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\; & x < 4 \text{ und } x \geq \tfrac{16}{5} \text{ und } x \geq 2
\end{aligned}$$



Keine Lösung haben Ungleichungen der Form $\sqrt{x} < y$ mit $y < 0$:

$$\boxed{\sqrt{x-1} < -1}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x-1} < -1 \\
\Leftrightarrow\; & \begin{cases} \sqrt{x-1} < -1 & \\ \text{und}\quad \sqrt{x+1} \geq 0 & \text{(Defn. der Wurzel)} \end{cases}
\end{aligned}$$



Quadrate und Wurzeln, Teil 2: Quadratische Ungleichungen

Betrachten wir nun quadratische Ungleichungen. Die bevorzugte Vorgehensweise ist die *quadratische Ergänzung*, die bekannt sein sollte, die ich aber nochmal kurz erläutern werde: Die Hauptidee der quadratischen Ergänzung, ist es, einen Term der Form

$$ax^2 + bx + c$$

zwecks einfacherer Rechnung mithilfe der 1. oder 2. binomischen Formel in die Form

$$a(x \pm d)^2 + e$$

zu überführen. Binomische Ausdrücke haben stets die Form $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. Nehmen wir nun $A = x$ an, können wir die Gleichung $2AB = bx$ nach B auflösen und somit das „fehlende Quadrat“ B^2 finden, das den Term zu einem binomischen Ausdruck ergänzt.

Beispiel. Möchten wir $5x^2 - 3x + 2$ quadratisch ergänzen, gehen wir wie folgt vor: Es ist

$$5x^2 - 3x + 2 = 5\left(x^2 - \frac{3}{5}x\right) + 2.$$

Mit $2xB = \frac{3}{5}x$ folgt $B = \frac{3}{10}$. Wir addieren $B^2 - B^2$, dies ist 0 und ändert den Wert nicht:

$$5\left(x^2 - \frac{3}{5}x\right) + 2 = 5\left(x^2 - \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right) + 2.$$

Ziehen wir nun $-B^2$ aus der Klammer, so hat die Klammer die Gestalt $A^2 \pm 2AB + B^2$.

$$5\left(x^2 - \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2\right) + 2 = 5\left(x^2 - \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{10}\right)^2\right) - 5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 2.$$

Nun schreiben wir die Klammer als binomischen Quadratterm und rechnen den Rest aus:

$$5\left(x^2 - \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{10}\right)^2\right) - 5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 + 2 = \underline{\underline{5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{31}{20}}}.$$

Anmerkung. Auch wenn ich dies persönlich nicht empfehlen würde, da es schwieriger anzuwenden ist, können wir uns die quadratische Ergänzung auch als allgemeine Formel merken:

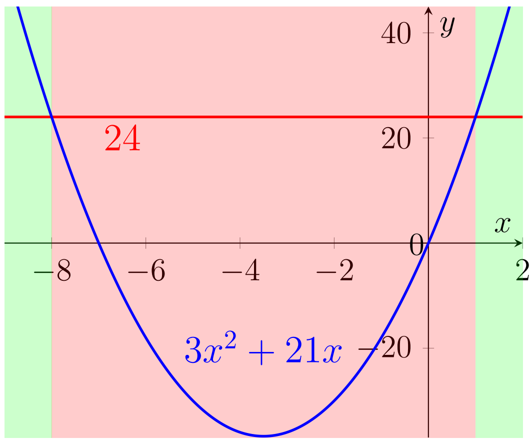
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= \underline{\underline{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}}. \end{aligned}$$

Die andere Vorgehensweise, die per se nicht falsch, aber weniger elegant ist, besteht aus Nullstellenbestimmung mit der p,q-Formel und Untersuchung des Vorzeichens von ax^2.

Wichtig ist hierbei – uns interessieren nur reelle Nullstellen! Komplexe Nullstellen sind beim Lösen quadratischer Ungleichungen nicht von Belang, da wir, wie zuvor besprochen, Ungleichungen mit komplexen Zahlen nicht auswerten können, da diese keinen Sinn haben.

Betrachten wir nun beide Lösungsmöglichkeiten am Beispiel der Ungleichung

$$\boxed{3x^2 + 21x > 24.}$$



Möglichkeit 1: Quadratische Ergänzung.
Wir ergänzen und stellen das Binom auf die eine und die Konstante auf die andere Seite:

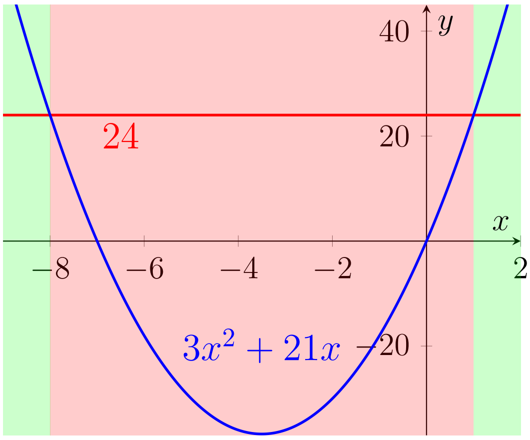
$$\begin{aligned}
& & 3x^2 + 21x &> 24 & & \\
&\Leftrightarrow & 3(x^2 + 7x) &> 24 & & \\
&\Leftrightarrow & 3\left(x + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) - 3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 &> 24 & & \\
&\Leftrightarrow & 3\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{147}{4} &> 24 & & \Big| + \frac{147}{4} \\
&\Leftrightarrow & 3\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 &> \frac{243}{4} & & \big| : 3 \\
&\Leftrightarrow & \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 &> \frac{81}{4} & & \Big| \sqrt{} \quad \text{⚠ Betragsstriche!} \\
&\Leftrightarrow & \left|x + \frac{7}{2}\right| &> \frac{9}{2} & &
\end{aligned}$$

Wichtig: Es gilt zwar $|a| < b \;\Leftrightarrow\; -b < a < b$, aber $a < |b|$ ergibt zwei „oder"-Ungleichungen.

$$\begin{aligned}
& & \left|x + \frac{7}{2}\right| > \frac{9}{2} & & & & \\
&\Leftrightarrow & x + \frac{7}{2} > \frac{9}{2} & & \text{oder} & \quad -\left(x + \frac{7}{2}\right) > \frac{9}{2} & \\
&\Leftrightarrow & x + \frac{7}{2} > \frac{9}{2} & \quad \Big| -\frac{7}{2} & \text{oder} & \quad -x - \frac{7}{2} > \frac{9}{2} & \quad \Big| -\frac{9}{2} + x \\
&\Leftrightarrow & x > 1 & & \text{oder} & \quad -8 > x &
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist somit gegeben durch $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -8 \vee x > 1\} = (-\infty, -8) \cup (1, \infty)$.

$$\boxed{3x^2 + 21x > 24}$$



Möglichkeit 2: Nullstellenbestimmung.
Zur Erinnerung: Die p, q-Formel folgt direkt durch quadratische Ergänzung und besagt:

$$x^2 + px + q = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir behandeln die Ungleichung zunächst als Gleichung und lösen für x:

$$\begin{array}{rrcll}
 & 3x^2 + 21x & = & 24 & \quad |-24| \\
\Leftrightarrow & 3x^2 + 21x - 24 & = & 0 & \quad |:3 \\
\Leftrightarrow & x^2 + 7x - 8 & = & 0 & \quad |\, p, q\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-8)} & \quad |\, p, q\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} & \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} & \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{7}{2} \pm \frac{9}{2} & \\
\Leftrightarrow & & x = -8 \;\vee\; x = 1 & &
\end{array}$$

Da quadratische Funktionen (wie alle reellen Polynome) stetig sind, erhalten wir genau drei Intervalle, auf denen das Vorzeichen jeweils gleich ist: $(-\infty, -8)$, $(-8, 1)$ und $(1, \infty)$. Untersuchen wir nun die Vorzeichen von $3x^2 + 21x - 24$ auf diesen Intervallen:

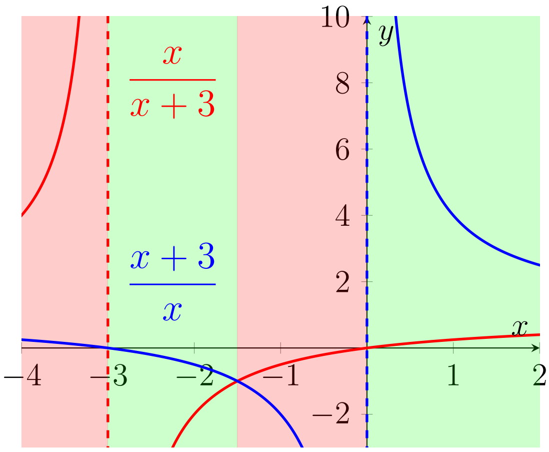
Intervall I	$x \in I$	Funktionswert $3x^2 + 21x - 24$	Vorzeichen auf I
$(-\infty, -8)$	10	$3 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10 - 24 = 300 + 210 - 24 = 486 > 0$	positiv
$(-8, 1)$	0	$3 \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 - 24 = -24 < 0$	negativ
$(1, \infty)$	2	$3 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 24 = 12 + 42 - 24 = 30 > 0$	positiv

Da $3x^2 + 21x > 24 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 + 21x - 24 > 0 \;\Leftrightarrow\; (3x^2 + 21x - 24$ ist positiv) gilt, erhalten wir auch mit dieser Methode offensichtlich die Lösungsmenge $(-\infty, -8) \cup (1, \infty)$.

Zusammenfassung.
Während wir in der Schule eher die p, q-Formel als die quadratische Ergänzung angewandt haben, ist letztere für Ungleichungen offensichtlich die elegantere und bevorzugte Methode.

Die Aufgabe der Miniklausur – Version „Viel Erfolg!"

$$\boxed{\frac{x+3}{x} > \frac{x}{x+3}}$$



$$\frac{x+3}{x} > \frac{x}{x+3} \qquad |\cdot x \mid \cdot (x+3)$$

An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen, da Multiplikation mit neg. Zahlen die Ungleichung umkehrt und wir die Vorzeichen von x und $x+3$ nicht kennen.

	Fall	VZ von x	VZ von $x+3$
1	$x < -3$	$-$	$-$
2	$-3 < x < 0$	$-$	$+$
3	$0 < x$	$+$	$+$

In Fall 1 sind beide Vorzeichen negativ, also wird die Ungleichung zweimal umgekehrt, bleibt also so wie sie ist; in Fall 3 sind beide VZ positiv, also ändert sich auch hier nichts:

$$\begin{aligned} && \frac{x+3}{x} &> \frac{x}{x+3} && |\cdot x \mid \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow && (x+3)^2 &> x^2 \\ \Leftrightarrow && x^2+6x+9 &> x^2 && |-x^2-9 \\ \Leftrightarrow && 6x &> -9 && |:6 \\ \Leftrightarrow && x &> -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Im Fall 1 steht $x > -\frac{3}{2}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x < -3$, also erhalten wir keine Lösungen. Im Fall 3 ist $x > -\frac{3}{2}$ offenbar für alle $x > 0$ wahr, also sind alle $x > 0$ Lösungen.

Im Fall 2 ist nur einer der beiden Faktoren negativ, also wird die Ungleichung umgekehrt:

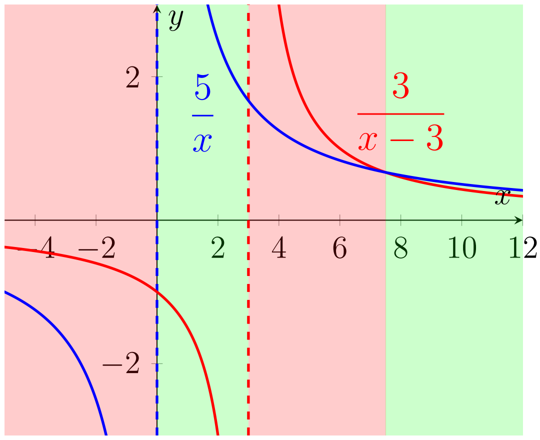
$$\begin{aligned} && \frac{x+3}{x} &> \frac{x}{x+3} && |\cdot x \mid \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow && (x+3)^2 &< x^2 && |\text{ analog zu Fall 1 \& 3} \\ \Leftrightarrow && x &< -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Somit erfüllen alle $-3 < x < 0$ mit $x < -\frac{3}{2}$, also alle $-3 < x < -\frac{3}{2}$ die Ungleichung.

Insgesamt erhalten wir nun die Lösung $(-3, -\frac{3}{2}) \cup (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\frac{3}{2} \vee x > 0\}$.

Die Aufgabe der Miniklausur – Version „Viel Erfolg!“

$$\boxed{\frac{5}{x} > \frac{3}{x-3}}$$



$$\frac{5}{x} > \frac{3}{x-3} \qquad | \cdot x \; | \cdot (x-3)$$

An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen, da Multiplikation mit neg. Zahlen die Ungleichung umkehrt und wir die Vorzeichen von x und $x-3$ nicht kennen.

	Fall	VZ von x	VZ von $x-3$
1	$x < 0$	$-$	$-$
2	$0 < x < 3$	$+$	$-$
3	$3 < x$	$+$	$+$

Im Fall 1 sind beide Vorzeichen negativ, also wird die Ungleichung zweimal umgekehrt, bleibt also so wie sie ist; im Fall 3 sind beide VZ positiv, also ändert sich auch hier nichts:

$$\begin{aligned}
&& \frac{5}{x} &> \frac{3}{x-3} && | \cdot x \; | \cdot (x-3)\\
&\Leftrightarrow & 5(x-3) &> 3x &&\\
&\Leftrightarrow & 5x-15 &> 3x && | -3x+15\\
&\Leftrightarrow & 2x &> 15 && | : 2\\
&\Leftrightarrow & x &> \frac{15}{2}. &&
\end{aligned}$$

Im Fall 1 steht $x > \frac{15}{2}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x < 0$, also erhalten wir keine Lösungen. Im Fall 3 sind alle $x > 3$ mit $x > \frac{15}{2}$ und somit natürlich alle $x > \frac{15}{2}$ Lösungen.

Im Fall 2 ist nur einer der beiden Faktoren negativ, also wird die Ungleichung umgekehrt:

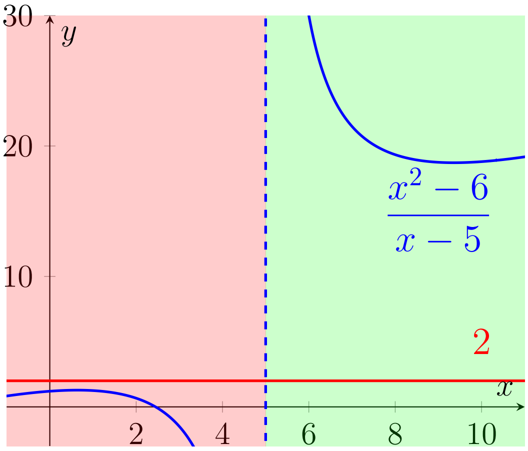
$$\begin{aligned}
&& \frac{5}{x} &> \frac{3}{x-3} && | \cdot x \; | \cdot (x-3)\\
&\Leftrightarrow & 5(x-3) &< 3x && | \text{ analog zu Fall 1 \& 3}\\
&\Leftrightarrow & x &< \frac{15}{2}. &&
\end{aligned}$$

Die Aussage $x < \frac{15}{2}$ ist für alle $0 < x < 3$ wahr, also lösen alle $0 < x < 3$ die Ungleichung.

Insgesamt erhalten wir nun die Lösung $(0,3) \cup (\frac{15}{2}, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 3 \;\vee\; x > \frac{15}{2}\}$.

Die Aufgabe der Miniklausur – Version „`Viel Erfolg!`“

$$\boxed{\frac{x^2-6}{x-5} > 2}$$



$$\frac{x^2-6}{x-5} > 2 \qquad |\cdot(x-5)$$

An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen, da Multiplikation mit negativen Zahlen die Ungleichung umkehrt und wir das Vorzeichen von $x-5$ nicht kennen.

	Fall	VZ von $x-5$
1	$x < 5$	$-$
2	$5 < x$	$+$

Im Fall 1 ist das Vorzeichen negativ, also wird die Ungleichung umgekehrt:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x-5} &> 2 && |\cdot(x-5) \\ \Leftrightarrow \quad x^2-6 &< 2x-10 && |-2x+7 \text{ (quadr. Ergänzung)} \\ \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1 &< -3 \\ \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 &< -3. \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir bereits aufhören, da der Ausdruck $(x-1)^2$ offenbar für <u>jedes</u> $x \in \mathbb{R}$ nichtnegativ ist und somit nicht kleiner als -3 sein kann: wir erhalten keine Lösungen.

Im Fall 2 ist das Vorzeichen positiv, also bleibt die Ungleichung so, wie sie ist:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x-5} &> 2 && |\cdot(x-5) \\ \Leftrightarrow \quad x^2-6 &> 2x-10 && |\text{ analog zu Fall 1} \\ \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 &> -3. \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir bereits aufhören, da der Ausdruck $(x-1)^2$ offenbar für <u>jedes</u> $x \in \mathbb{R}$ nichtnegativ ist und somit stets größer als -3 ist. Somit sind alle $x > 5$ Lösungen.

Insgesamt erhalten wir also die Lösung $(5,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 5\}$.

Anmerkung. Wir können auch die Nullstellenmethode anstatt quadratischer Ergänzung benutzen:

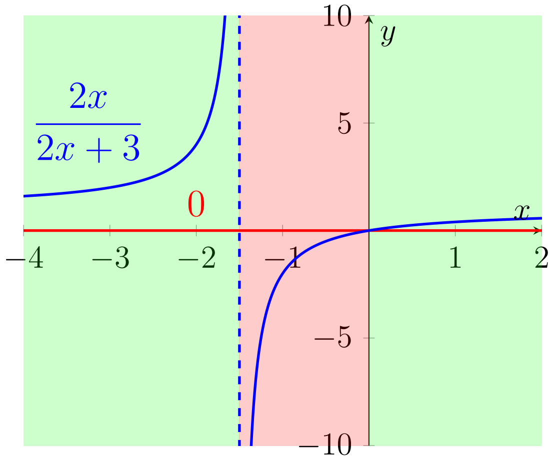
$$x^2-2x+1=-3 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x+4=0 \;\Leftrightarrow\; x = -\tfrac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-2}{2}\right)^2 - 4} = -1 \pm \sqrt{-3};$$

somit hat die quadratische Funktion keine reellen Nullstellen[3] und liegt, da der Leitkoeffizient positiv ist, komplett über der x-Achse, ist also auf ganz $\mathbb{R}$ strikt positiv – somit ergeben sich auch hier im Fall 1 keine Lösungen (da x^2-2x+4 negativ sein müsste) und im Fall 2 alle $x > 5$.

[3] <u>Auf keinen Fall</u> ist hieraus etwas wie „$x > -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$“ zu folgern – dies ergibt nämlich keinen Sinn!

Die Aufgabe der Miniklausur – Version „*Viel Erfolg!*“

$$\boxed{\frac{2x}{2x+3} > 0}$$



$$\frac{2x}{2x+3} > 0 \qquad | \cdot (2x+3)$$

An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen, da Multiplikation mit negativen Zahlen die Ungleichung umkehrt und wir das Vorzeichen von $2x+3$ nicht kennen.

	Fall	VZ von $2x+3$
1	$x < -\frac{3}{2}$	$-$
2	$-\frac{3}{2} < x$	$+$

Im Fall 1 ist das Vorzeichen negativ, also wird die Ungleichung umgekehrt:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+3} &> 0 && | \cdot (2x+3) \\ \Leftrightarrow \quad 2x &< 0 && | : 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &< 0. \end{aligned}$$

Die Aussage $x < 0$ ist offenbar für alle $x < -\frac{3}{2}$ wahr, also lösen alle $x < -\frac{3}{2}$ die Ungleichung.

Im Fall 2 ist das Vorzeichen positiv, also bleibt die Ungleichung so, wie sie ist:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+3} &> 0 && | \cdot (2x+3) \\ \Leftrightarrow \quad 2x &> 0 && | : 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &> 0. \end{aligned}$$

Somit lösen alle $x > -\frac{3}{2}$ mit $x > 0$ und somit genau alle $x > 0$ die Ungleichung.

Insgesamt erhalten wir nun die Lösung $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\frac{3}{2} < x \;\vee\; x > 0\}$.