Inoffizielles Skript zur Vorlesung Analysis I

Vorwort

Danke für die Bereitstellung eurer Mitschriften!

Verwendete Mitschriften nach Vorlesung:

	Oktober					November								Dezember						Januar							Feb.	
	15	18	22	25	29	5	8	12	15	19	22	26	29	3	6	10	13	17	20	10	14	17	21	24	28	31	4	7
eigene			✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓		✓		✓			
Katja	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓																				
Nadine	✓	✓	✓																					✓	✓	✓	✓	✓
Pamuk	✓	✓																										
Julia							✓				✓	✓	✓	✓	✓	✓						✓	✓					
Dennis								✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓							
Angelina								✓																				
Bianca																				✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Birte																							✓	✓			✓	
Kübra																											✓	✓
Kathi																												✓
Ayla																										✓	✓	

Danke zudem an Lars und Paul für Hinweise auf kleinere Fehler in (1.43), (1.83) und (1.93).

HINWEIS: Ich würde mich noch über weitere Mitschriften freuen, da es wünschenswert wäre, zu jeder Vorlesung mindestens zwei Exemplare zum Abgleich vorliegen zu haben. Ich erkenne zwar die gröbsten Rechtschreib- und Abschreibefehler direkt und beseitige diese umgehend, jedoch werden mir sicherlich auch einige Fehler entgehen.

Alle gelb hinterlegten Anmerkungen stammen nicht aus dem Originalskript, sondern sind nützliche Kommentare/Hinzufügungen meinerseits.

Ich würde im Übrigen diejenigen, die sich die entsprechende Kompetenz zutrauen, bitten, einmal die Beweise zu den Übungsaufgaben auf Richtigkeit und Vollständigkeit zu überprüfen.

Bezüglich konstruktiver Kritik, Kommentaren, Fehlern im Skript etc. erreicht ihr mich über:
Lukas Steenvoort, *Lukas.Steenvoort@rub.de* oder einfach vor/nach der Vorlesung im Hörsaal.

1 Reelle Zahlen und Folgen von reellen Zahlen

0 Mengen

Wir setzen den Begriff der **Menge** als bekannt voraus und erläutern nur kurz die wichtigsten Operationen, die auf Mengen erklärt sind.

Mengen werden meistens mit großen lateinischen Buchstaben, ihre Elemente typischerweise mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Ist a ein Element der Menge M, so schreibt man

$a \in M$ Sprechweise:
a ist ein Element von M.
a ist in M enthalten.
M enthält das Element a.

Ist jedes Element der Menge N auch ein Element der Menge N, so schreibt man

$N \subset M$ Sprechweise:
N ist Untermenge/Teilmenge von M.
N ist in M enthalten.

Beispiele:

(1) $N =$ Menge der natürlichen Zahlen, also $\mathbb{N}$
$M =$ Menge der reellen Zahlen, also $\mathbb{R}$

(2) $N =$ Menge der Affen
$M =$ Menge der Tiere

Zwei Mengen N und M sind genau dann gleich, wenn M in N und umgekehrt auch N in M enthalten ist. Man kann also sagen: Die Aussage $M = N$ bedeutet nichts anderes als $M \subset N \wedge N \subset M$.
Will man also von zwei irgendwie definierten Mengen zeigen, dass sie übereinstimmen, so muss man zwei Dinge nachweisen:

1. Wenn $x \in M$, gilt auch $x \in N$, d.h. $M \subset N$
2. Wenn $x \in N$, gilt auch $x \in M$, d.h. $N \subset M$

Operationen auf Mengen

Seien die Mengen M und N irgendwie gegeben.

Der **Durchschnitt** (auch **Schnittmenge**) $M \cap N$ ist die Menge aller Elemente x, die sowohl in M als auch in N enthalten sind, also

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N.$$

Die **Vereinigungsmenge** $M \cup N$ besteht aus allen Elementen x, die in M oder in N enthalten sind, also

$$x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in M \vee x \in N.$$

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass „*oder*“ ($\vee$) in der Mathematik im nicht-ausschließenden Sinne verwendet wird! Wenn x sowohl in M als auch in N enthalten ist, so ist die Aussage

„x ist ein Element von M oder N“

wahr.
Es gilt also: $M \cap N \subset M \cup N$.

Beispiel:
M = Menge aller Studenten
N = Menge aller Menschen, die älter als 40 Jahre sind

Jemand gehört dann zu der Vereinigungsmenge $M \cup N$, wenn er studiert oder älter als 40 Jahre ist (oder beides gleichzeitig).
$M \cap N$ ist die Menge der über 40-jährigen Studenten.

Wenn M und N kein einziges Element gemeinsam haben, so ist $M \cap N$ die sogenannte **leere Menge** $\varnothing$. Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass sie keine Elemente enthält.

Es ist beispielsweise zu vermuten, dass die Menge der Kamele, die in der Antarktis leben, die leere Menge beschreibt.

18.10.2013

1 Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

Die *Addition* und *Multiplikation* von reellen Zahlen sind Spezialfälle des Begriffs der Komposition (innere Verknüpfung auf einer Menge M).

(1.1) Definition
Eine **Komposition** auf einer Menge M ist eine Vorschrift, gemäß welcher je zwei Elementen $a, b \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $e = a \perp b$ zugeordnet wird, welches wieder in M enthalten ist.

Im Allgemeinen wird es auf die Reihenfolge von a und b ankommen. Es sind also $a \perp b$ und $b \perp a$ im Allgemeinen zwei verschiedene Elemente von M.

Selbstverständlich kann man anstelle von „$\perp$" auch ein anderes Zeichen zur Beschreibung verwenden. Folgende Zeichen sind gebräuchlich: $a \perp b$, $a \top b$, $a \cdot b$, ab, $a + b$, $a \wedge b$, ...

Verwendet man also $\cdot$ als Kompositionszeichen, so spricht man von einer Multiplikation und nennt $a \cdot b$ das Produkt von a und b.

Verwendet man $+$ als Kompositionszeichen, so spricht man von einer Addition und nennt $a + b$ die Summe aus a und b.

ACHTUNG: Beispielsweise der Begriff der Addition wird hier nur als Sprechweise verwendet. Er kann für jede Komposition in irgendeiner Menge verwendet werden.

Das Axiomensystem der reellen Zahlen

Das Axiomensystem für die reellen Zahlen besteht aus folgenden Gruppen.
I. Körperaxiome
II. Anordnungsaxiome
III. Vollständigkeitsaxiom

0. Axiom

Die reellen Zahlen sind Elemente einer gewissen Menge $\mathbb{R}$, die mindestens zwei Elemente enthält. Wir können also anstelle von „x ist eine reelle Zahl“ immer sagen, „x ist ein Element von $\mathbb{R}$“ ($x \in \mathbb{R}$).

I Körperaxiome

In der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Kompositionen ausgezeichnet: die *Addition* und die *Multiplikation*. Dabei sind folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
Assoziativgesetze

(ii) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$
Kommutativgesetze

(iii) Es existieren zwei eindeutig bestimmte Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:
$a + 0 = a$ **neutrales Element der Addition**
$a \cdot 1 = a$ **neutrales Element der Multiplikation**

(iv) Zu jedem Element $a \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutig bestimmtes $-a \in \mathbb{R}$, so dass $a + (-a) = 0$ ist.

Zu jedem von 0 verschiedenen Element $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) existiert ein eindeutig bestimmtes Element $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1}$.

Man nennt $-a$ das **Negative** und a^{-1} das **Inverse** von a.

(v) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ **Distibutivgesetze**

Bevor wir das nächste Axiomensystem formulieren, ziehen wir aus den Körperaxiomen einige Folgerungen, wobei wir rein logisch aus den Axiomen schließen und die anschauliche Vorstellung, die wir uns von den reellen Zahlen gebildet haben, nicht benutzen.

(1.2) Bemerkung
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es gibt eine und nur eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass $a + x = b$ gilt.

Beweis für die *Eindeutigkeit* von x:
Aus der Gleichung $a + x = b$ folgt
$$(-a) + (a + x) = (-a) + b.$$
Anwendung des Assoziativgesetzes zeigt
$$((-a) + a) + x = (-a) + b$$
$$0 + x = x = ((-a) + b)$$
also gilt $x = (-a) + b$.
Beweis für die *Existenz* von x:
Wir prüfen nach, dass tatsächlich $a + x = b$ mit $x = (-a) + b$ gilt:
$$a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b. \qquad \square$$
Schreibweise: $b - a := (-a) + b$

(1.3) Bemerkung
Es gilt $a \cdot 0 = 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Es gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$.
Außerdem ist $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$.
Aus Bemerkung (1.2) folgt: $a \cdot 0 = 0$ □

(1.4) Bemerkung
Es ist $1 \neq 0$.

Beweis:
Nach dem 0. Axiom existiert eine von 0 verschiedene reelle Zahl a $(a \neq 0)$.
Wegen Bemerkung (1.3) ist $a \cdot 0 = 0$, gleichzeitig gilt aber, dass $a \cdot 1 = a$ ist.
Demnach kann nicht $1 = 0$ sein. □

(1.5) Bemerkung
Es gilt $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Beweis:
Aus $1 + (-1) = 0$ folgt durch Multiplikation mit (-1):
$(-1) + (-1) \cdot (-1) = 0$
also $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$ □

(1.6) Bemerkung
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x, so dass $a \cdot x = b$ gilt.

Der Beweis funktioniert analog zum Beweis von (1.2).

Beweis für die *Eindeutigkeit* von x:

$$\begin{aligned} a \cdot x = b \quad &\Rightarrow \quad a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b \\ &\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(a^{-1} \cdot a)}_{=1} \cdot x = a^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

also gilt $x = a^{-1} \cdot b$.
Beweis für die *Existenz* von x:
Wir zeigen, dass $a \cdot x = b$ für $x = a^{-1} \cdot b$ gilt:

$$a \cdot [a^{-1} \cdot b] = [a \cdot a^{-1}] \cdot b = 1 \cdot b = b.$$ □

Schreibweise: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$

(1.7) Bemerkung
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \vee b = 0$.

Beweis: Sei $a \cdot b = 0,\; a \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass dann $b = 0$ gilt.

Wegen $a \neq 0$ existiert das Inverse a^{-1}.
Dann gilt einerseits: $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$,
andererseits: $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$.
Aus $a \neq 0$ folgt also $b = 0$. □

Man kann Bemerkung (1.7) auch anders ausdrücken:
„Sind a und b von Null verschieden, so ist auch $a \cdot b$ von Null verschieden.“
Man sagt auch, $\mathbb{R}$ ist *nullteilerfrei.*

Schreibweise: $ab := a \cdot b$

(1.8) Bemerkung

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, b und d (und somit auch $b \cdot d$) von Null verschieden.

Es gilt: (i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

(ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(iii) $\left(\frac{d}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{d}$

Die Beweise für (ii) und (iii) verlaufen analog.

Beweis für (i): Wegen $bd \neq 0$ ist $x = \frac{ad+bc}{bd} \Leftrightarrow (bd)x = ad + bc$.
Es genügt daher, zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
& (bd)(ab^{-1} + cd^{-1}) &= ad + bc \quad \text{gilt.}\\
\Leftrightarrow\ & (bd)(ab^{-1}) + (bd)(cd^{-1}) &= ad + bc\\
\Leftrightarrow\ & (db)(b^{-1}a) + (bd)(d^{-1}c) &= ad + bc\\
\Leftrightarrow\ & d[b(b^{-1}a)] + b[d(d^{-1}c)] &= ad + bc\\
\Leftrightarrow\ & d[(bb^{-1})a)] + b[(dd^{-1})c)] &= ad + bc\\
\Leftrightarrow\ & da + bc &= ad + bc \qquad \square
\end{aligned}$$

Schreibweise: Seien a, b, c reelle Zahlen. Man definiert

$$a + b + c := (a + b) + c \ \Leftrightarrow\ a + (b + c),$$
$$a \cdot b \cdot c := (a \cdot b) \cdot c \ \Leftrightarrow\ a \cdot (b \cdot c).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Klammerung (Assoziativgesetz) lässt man die Klammern einfach weg. Das Gleiche kann man auch für die Summe bzw. das Produkt von 4 und mehr reellen Zahlen machen.

Durch die Körperaxiome kann noch nicht ausgedrückt werden, dass es *positive* und *negative* Zahlen gibt. Diese Begriffe werden in einem weiteren Axiomensystem eingeführt.

II Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine gewisse Teilmenge $\mathbb{R}_+$ ausgezeichnet. Man nennt die Elemente von $\mathbb{R}_+$ die **positiven reellen Zahlen** und schreibt anstelle von $x \in \mathbb{R}_+$ häufig auch $x > 0$.

Die positiven Zahlen haben die folgenden Eigenschaften:
(i) Wenn a und b positiv sind, so auch $a + b$ und $a \cdot b$,
also: $a, b > 0 \ \Rightarrow\ a + b > 0 \wedge a \cdot b > 0$.
(ii) Sei a positiv, dann ist $-a$ nicht positiv.
also: $a > 0 \ \Rightarrow\ -a \not> 0$.
(iii) Sei a eine von Null verschiedene, nicht-positive Zahl, dann ist $(-a)$ positiv,
also: $a \neq 0 \ \wedge a \not> 0 \Rightarrow\ (-a) > 0$.

Wir benutzen im Folgenden die üblichen Bezeichnungen und Sprechweisen:
- $a > b$ a ist größer als b, per definitionem bedeutet dies $a - b > 0$
- $b < a$ b ist kleiner als a, wird häufig anstelle von $a > b$ geschrieben
- Diejenigen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$ heißen die **negativen Zahlen**.
- $a \geq b$ bedeutet, dass $a > b$ oder $a = b$ ist.

Wir ziehen Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen.

(1.9) Bemerkung

Sei $a \neq 0$. Dann ist $a^2 := a \cdot a > 0$.

Beweis durch Fallunterscheidung:
(a) $a > 0 \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} a \cdot a > 0$
(b) $a < 0 \overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} -a > 0 \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} (-a)(-a) > 0 \Leftrightarrow a \cdot a > 0$ $\square$

(1.10) Bemerkung

Die Zahl 1 ist positiv, also $1 > 0$.

Beweis::
Wir wissen wegen Bemerkung (1.4) bereits, dass $1 \neq 0$ gilt.
Wegen Bemerkung (1.9) gilt daher

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0 \qquad \square$$

(1.11) Bemerkung

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt $a > b \wedge b > c \;\Rightarrow a > c$.

Beweis: $a > b \;\Leftrightarrow\; a - b > 0$
$b > c \;\Leftrightarrow\; b - c > 0$
Daher folgt $(a - b) + (b - c) > 0 \;\Leftrightarrow\; a > c$. □

(1.12) Bemerkung

(i) Aus $a \geq b$ und $b \geq a$ folgt $a = b$.
(ii) Seien $a \geq b, c \geq 0$. Dann gilt $ac \geq bc$.
(iii) Aus $a \geq b, b > 0$ folgt $a^{-1} \leq b^{-1}$.

Beweis:
Übungsaufgabe!

(1.13) Definition

Als **(Absolut-)Betrag** einer reellen Zahl a definiert man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Unmittelbar aus der Definition kann man folgende Eigenschaften ableiten:
(1) Es ist $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.
(2) $-|a| \leq a \leq |a|$
(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$
(4) $|a^{-1}| = |a|^{-1}$
(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**Dreiecksungleichung**) *(Beweis durch Fallunterscheidung)*
(6) $\Big||a| - |b|\Big| \leq \Big|a \pm b\Big|$ („verschärfte Dreiecksungleichung") *(Übungsaufgabe!)*
(7) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < \epsilon$ für jede positive Zahl $\epsilon > 0$, dann ist $a = 0$.
Beweis: Ist $a \neq 0$, so gilt $|a| > \frac{1}{2}|a|$, also wäre die vorausgesetze Ungl. für $\epsilon = \frac{1}{2}|a|$ falsch. $\lightning$□

Bevor wir zum letzten Axiom kommen, einige Anmerkungen.

(1.14) Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Maximum** von M, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
(i) $a \in M$
(ii) $x \leq a \;\forall x \in M$

Entsprechend definiert man das **Minimum**, indem man anstelle von $a \geq x$ die Ungl. $a \leq x$ fordert.

(1.15) Bemerkung

Das Maximum (Minimum) einer Menge von reellen Zahlen ist, sofern es überhaupt existiert, eindeutig bestimmt.

Beweis:
Seien a, b Maxima der Menge M, dann gilt:
$a \geq b$, denn a ist Maximum von M und $b \in M$
$\wedge$ $b \geq a$, denn b ist Maximum von M und $a \in M$
$\Rightarrow$ $a = b$ nach Bemerkung (1.12).

Bezeichnung:
Wenn das Maximum (Minimum) einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ existiert, bezeichnen wir es mit $\max M$ ($\min M$).
Natürlich gibt es Mengen, die weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen, bspw.
(i) die leere Menge
(ii) die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen

Interessanter ist:
(1.16) Beispiel
$M := \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$
Behauptung: Die Menge M hat kein Maximum.
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, M hätte ein Maximum a. Wegen $a \in M$ ist $a < 2$.
Wir betrachten nun irgendeine Zahl zwischen a und 2.

$$a < x < 2 \qquad (\text{z.B.: } x = \tfrac{a+2}{2})$$

Dann gilt $x \in M$, denn $x < 2$. Also auch $a < x$, was ein Widerspruch zu $a = \max M$ ist. ↯ □

Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ besitzt also kein Maximum, obwohl sie nach oben beschränkt ist!

(1.17) Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen.
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt obere (untere) Schranke von M, falls $\forall x \in M$ die Ungleichung $x \leq a$ ($x \geq a$) gilt.

Natürlich gilt: (a ist obere Schranke von M)$\wedge b \geq a \;\Rightarrow\; b$ ist obere Schranke von M.

Wenn die Menge M ein Maximum besitzt, so besitzt M insbesondere eine obere Schranke.

Sprechweise: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt.

Für $M = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ ist die Zahl 2 eine obere Schranke von M, sie ist sogar die kleinste aller oberen Schranken, d.h. ist a eine obere Schranke von M, so ist $2 \leq a$.

Beweis: Wir schließen wieder indirekt.
Angenommen, es existiere eine obere Schranke a mit der Eigenschaft $a < 2$.
Wie vorhin betrachten wir $x = \frac{a+2}{2}$. Insbesondere ist $a < x < 2$.
Dann gilt $x \in M$ wegen $x < 2$, d.h. a kann nicht obere Schranke sein wegen $a < x$. ↯ □

Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ ist nach oben beschränkt. Sie besitzt kein Maximum. Aber die Zahl 2 ist die *kleinste obere Schranke* von M.

III Vollständigkeitsaxiom

(1.18) Bemerkung
Sei M eine nicht-leere Menge von reellen Zahlen, welche nach oben beschränkt ist.
Dann existiert eine eindeutig bestimmte *kleinste obere Schranke* a von M, d.h.
(i) a ist eine obere Schranke von M
(ii) ist b eine obere Schranke von M, so gilt $a \leq b$

Anders ausgedrückt ist a das Minimum aller oberen Schranken von M.

Bezeichnung: Das **Supremum** von M ($\sup M$) ist die *kleinste obere Schranke* von M.

Sei $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschr., dann ist die Menge $N := \{x \in \mathbb{R} : -x \in M\}$ nach oben beschränkt.

Ist a eine untere Schranke von M, so ist $-a$ eine obere Schranke von N und umgekehrt.

Aus dem Vollständigkeitsaxiom und Bemerkung (1.18) ergibt sich daher:
Ist M eine nicht-leere nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen, so besitzt M eine *größte untere Schranke* und diese ist eindeutig bestimmt.

Bezeichnung: Das **Infimum** von M ($\inf M$) ist die *größte untere Schranke* von M.

29.10.2013

Wir betrachten abschließend eine Anwendung für das Vollständigkeitsaxiom und studieren dazu die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

Diese Menge ist nach oben beschränkt, bspw. ist 2 eine obere Schranke, denn wäre dies nicht der Fall, so müsste eine Zahl $x \in M, x > 2$ existieren.
Aus den Anordnungsaxiomen folgt $x^2 := x \cdot x > 2 \cdot x > 2 \cdot 2 > 2 \cdot 1 = 2$.
Also steht $x^2 > 2$ im Widerspruch zur Annahme $x \in M$!

Die Menge M ist nicht leer, bspw. ist $1 \in M$.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert eine *kleinste obere Schranke* a der Menge M.
$1 \in M \;\Rightarrow\; a \geq 1$

Behauptung: Es gilt $a^2 = 2$.
Beweis: Wir zeigen zunächst $a^2 \leq 2$.
Wir schließen indirekt, nehmen also $a^2 > 2$ an.
Es existiert eine positive Zahl b mit den Eigenschaften $a^2 > b^2 > 2$, $a > b > 0$,
bspw. $b = a + \frac{2-a^2}{2a} = \frac{a^2+2}{2a}$, denn es gilt $b^2 - 2 = \frac{(a^2-2)^2}{4a^2} > 0$
Die Zahl b ist eine obere Schranke von M, aber *echt kleiner* als a! $\lightning$ $\square$

Nun zeigen wir $a^2 \geq 2$.
Wir schließen indirekt, nehmen also $a^2 < 2$ an.
Wie im ersten Fall erhalten wir einen Widerspruch, wenn es gelingt, eine positive Zahl b der Eigenschaft $a^2 < b^2 < 2$ zu konstruieren.

Wir machen den Ansatz $b = a + \epsilon,\; 0 < \epsilon < 1$, dann gilt $b^2 = a^2 + 2a\epsilon + \epsilon^2 < a^2 + 2a\epsilon + \epsilon$.
Man nehme bspw. $\epsilon = \frac{2-a^2}{2(2a+1)}$ $\square$

Wir haben also mithilfe des Vollstd.axioms bewiesen, dass eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = 2$ existiert. Wir werden später sehen, dass man dies ohne das Vollständigkeitsaxiom nicht beweisen kann.

2 Natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen

Die **natürlichen Zahlen** sind diejenigen reellen Zahlen, die man als Summe aus 1en darstellen kann.

$$1 = 1 \qquad 2 = 1 + 1 \qquad 3 = 2 + 1 = (1 + 1) + 1 = 1 + 1 + 1 \qquad \text{etc.}$$

Das „etc“ ist mathematisch wenig befriedigend. Da wir aber das Zählen, also die natürlichen Zahlen als bekannt voraussetzen wollen, verzichten wir auf eine exakte Konstruktion.

Wir <u>setzen</u> also als bekannt voraus, dass es eine Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:
(i) Es gibt keine natürliche Zahl, die kleiner als 1 ist.
(ii) Die Summe und das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl.
(iii) Die Differenz $n - m$ zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl, sofern $n > m$ ist.
(iv) Mit der Bezeichnung $A_n := \{x \leq n : x \text{ natürlich } \}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_{n+1} = A_n \cup \{n+1\}$
(Mit anderen Worten: Zwischen n und $n+1$ existiert keine weitere natürliche Zahl!)
(v) Jede nicht-leere Menge von natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum.

Auf der Eigenschaft (v) beruht das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion**:
Jeder natürlichen Zahl sei eine Aussage $A(n)$ zugeordnet.

<u>Voraussetzung</u>
(a) $A(1)$ ist wahr.
(b) Aus der Annahme, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, lässt sich folgern, dass $A(n+1)$ wahr ist.

<u>Behauptung:</u>
Die Aussage $A(n)$ ist dann für *alle* natürlichen Zahlen n wahr.

Andernfalls müsste es wegen (v) eine kleinste natürliche Zahl n_0 geben, so dass $A(n_0)$ falsch ist, wegen (a) ist $n_0 \neq 1$. Daher ist auch $n = n_0 - 1$ eine natürliche Zahl. $A(n)$ ist wahr und wegen (b) muss auch $A(n+1) = A(n_0)$ wahr sein. $\lightning$

Dieselbe Überlegung zeigt, dass man das Beweisverfahren der vollständigen Induktion auch in der folgenden modifizierten Form verwenden kann:
Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ zugeordnet.

<u>Voraussetzung</u>
(a) $A(1)$ ist wahr.
(b) Aus der Annahme, dass n eine natürliche Zahl ist und die Aussagen $A(1)$, $A(2)$, $\ldots$, $A(n-1)$ wahr sind, lässt sich folgern, dass $A(n)$ wahr ist.

<u>Behauptung:</u> Die Aussage $A(n)$ ist dann für alle natürlichen Zahlen n wahr.

Als erste Anwendung des Vollständigkeitsaxioms zeigen wir:
<u>(1.19) Satz</u> (Archimedisches Prinzip)
Zu jeder reellen Zahlen x existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $n > x$.

<u>Beweis:</u> (indirekt)
Sei x eine reelle Zahl, so dass $n \leq x \; \forall n \in \mathbb{N}$. Mit anderen Worten, sei $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt.
Wir können dann die kleinste obere Schranke $a = \sup \mathbb{N}$ betrachten.
Da die Zahl $a - 1$ keine obere Schranke mehr sein kann, muss eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $n > a - 1$ existieren. Hieraus folgt $n + 1 > a$. $\lightning$ □

Man kann das Induktionsprinzip auch für Definitionen benutzen:
<u>(1.20) Definition</u>
Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann kann man für jede natürliche Zahl n die Zahl a^n (die n-te **Potenz** von a) definieren.
Man setzt $a^1 := a$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$, $n \in \mathbb{N}$.

5.11.2013

Hiermit kann man folgende Formeln ableiten:

(1.21) Potenzgesetze

(i) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
(ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad (m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$

Beweis: Durch vollständige Induktion nach n zu festem, aber beliebigem m.
Man definiert dann noch $a^0 = 1$ (auch $0^0 = 1!$) und $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, $a \neq 0$.
Dazu muss man sich allerdings klar machen, dass mit a auch jede Potenz a von Null verschieden ist.
Auch dies zeigt man durch vollständige Induktion.

(1.22) Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$, so „definiert“ man $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ („n **Fakultät**“).
Auch hier ist eine induktive Definition vorzunehmen:

$$1! = 1 \qquad (n+1)! = n! \cdot (n+1), \; n \in \mathbb{N}$$

Man definiert außerdem $0! = 1$.

Der sogenannte **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ („n über k“) ist durch $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ definiert. $(0 \leq k \leq n)$

Behauptung:
$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$
Hieraus folgt insbesondere, dass für jeden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt. *(Beweisen!)*

(1.23) weitere Beispiele

(i) Seien $a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Gemäß einer bestimmten Vorschrift ist also jeder natürlichen Zahl ν mit $1 \leq \nu \leq n$ eine gewisse reelle Zahl a_ν zugeordnet.
Man „definiert“ $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$.
Auch hier müsste man eine induktive Konstruktion vornehmen:
$\sum_{\nu=1}^{1} a_\nu = a_1, \qquad \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right) + a_{n+1}, \; a \in \mathbb{N}$

(ii) Die binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu \cdot b^{n-\nu}$.
Der Beweis erfolgt erneut durch vollständige Induktion nach n!

(iii) Ebenfalls mithilfe des Beweisprinzips der vollständigen Induktion beweist man
a) $\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\sum_{\nu=1}^{n} \nu} = \frac{1}{2} n(n+1)$
b) $\underbrace{1 + a + a^2 + \dots + a^n}_{\sum_{\nu=0}^{n} a^\nu = \sum_{\nu=1}^{n+1} a^{\nu-1}} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ für $a \neq 1, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(iv) Die **bernoullische Ungleichung** $(1+a)^n \geq 1 + na$ für $a \geq -1, n \in \mathbb{N}$.
Zum Beweis dieser Ungleichung könnte man zunächst daran denken, die binomische Formel zu benutzen, denn es gilt ja $(1+a)^n = 1 + na + \cdots$. Wären diese weiteren Summanden nicht negativ, so wäre diese Ungleichung bereits bewiesen. Dies ist jedoch nur der Fall für $a \geq 0$.
Daher zweckmäßiger: Induktionsbeweis.

(1.24) Definition

Eine reelle Zahl a heißt **ganz**, wenn $a \in \mathbb{N} \vee a = 0 \vee -a \in \mathbb{N}$ gilt.

(1.25) Bemerkung

Für ganze Zahlen a, b sind auch die Zahlen $a + b$, $a - b$ und $a \cdot b$ ganz.

Bezeichnung: $\mathbb{Z}$ Die Menge der ganzen Zahlen.

8.11.2013

(1.26) Hilfssatz
Sei x eine reelle Zahl. Es gibt nur eine größte ganze Zahl n mit der Eigenschaft $n \leq x$.

Beweis: Übungsaufgabe. (Hinweis: Vollständigkeitsaxiom.)

Bezeichnung: Die größte ganze Zahl $\leq x$ wird mit $[x]$ bezeichnet.[1] Offenbar ist $[x] \leq x < [x] + 1$.[2]

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind stabil gegenüber Bildung des negativen Elements, allerdings nicht gegenüber Inversenbildung im Allgemeinen.

(1.27) Definition
Eine reelle Zahl heißt **rational**, falls sie sich in der Form $x = \dfrac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ schreiben lässt.

(1.28) Bemerkung
Seien x, y rationale Zahlen. Dann sind auch die Zahlen $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ und $\frac{x}{y}$ (für $y \neq 0$) rational.

Bezeichnung: $\mathbb{Q}$ Die Menge der rationalen Zahlen.

Überlegung: Ist jede reelle Zahl rational oder sind die reellen Zahlen echt größer als $\mathbb{Q}$?

(1.29) Bemerkung
Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.

Zum Beweis benötigen wir einige Eigenschaften der *geraden Zahlen*.
Eine ganze Zahl heißt **gerade**, wenn $\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$ gilt, also $a = 2a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$.
Ist dies nicht der Fall, heißt $a \in \mathbb{Z}$ **ungerade**.

Eigenschaften:
a) a ungerade $\Leftrightarrow a = 2a_0 + 1,\ a_0 \in \mathbb{Z}$
b) $a^2 = a \cdot a$ gerade $\Leftrightarrow a$ gerade
c) Sei x rational. Es gibt eine Darstellung $x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$, wo a und b nicht beide gerade sind.

Beweis: Angenommen, x sei rational, d.h. besitzt die Darstellung $x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ und $x^2 = 2$.
Es gelte: $x^2 = 2$, d.h. $a^2 = 2b^2$.
Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:
(i) a ist ungerade. Dann ist nach b) auch a^2 ungerade. $2b^2$ ist jedoch gerade. ↯
(ii) a ist gerade, b und somit auch b^2 sind ungerade. a besitzt also die Darstellung $a = 2a_0$, $a \in \mathbb{Z}$ und es gilt $2b^2 = a^2 = 4a_0^2 \Leftrightarrow b^2 = 2a_0^2$. b^2 ist ungerade, $2a_0^2$ jedoch nicht. ↯
Beide Fälle führen also zum Widerspruch. $\square$

---

[1] Frau Rohde verwendet in ihrer Vorlesung das von *Carl Friedrich Gauß* im Jahre 1808 eingeführte Symbol $[x]$, allerdings lautet die heutzutage gebräuchlichere Notation der sog. *Abrundungs-* oder *Gaußklammerfunktion* $\lfloor x \rfloor$.

[2] An der Tafel stand zwar $x \leq [x] + 1$, jedoch gilt an dieser Stelle $x < [x] + 1$. Dies war vermutlich ein Schreibfehler, da im Beweis von Satz 1.30 $x < [x] + 1$ verwendet wird.

Die rationalen Zahlen liegen in einem gewissen Sinne **dicht** in den reellen Zahlen.

(1.30) Satz

Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann existiert eine rationale Zahl x mit $a < x < b$.

Beweis:
Nach dem archimedischen Prinzip (Satz 1.19) existiert eine natürliche Zahl n mit $n > \frac{1}{b-a}$.
Hieraus folgt $nb > na + 1 \geq [na] + 1 > na \quad \Rightarrow \quad a < \frac{[na]+1}{n} < b$. $\frac{[na]+1}{n}$ ist rational. $\square$

Nach (1.29) ist $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Nach (1.28) gelten die Körper- und Anordnungsaxiome auch im Bereich der rationalen Zahlen.
Es ist ohne das Vollständigkeitsaxiom also unmöglich, die Existenz eines $a \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = 2$ zu zeigen.

Zum Schluss dieses Abschnitts betrachten wir kurz den Begriff der **endlichen Menge**.

Der Prototyp einer endlichen Menge ist ein Abschnitt $A_n := \{1, \ldots, n\} = \{z \in \mathbb{N} : z \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Eine beliebige nichtleere Menge M heißt endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass man die Elemente aus M durchnummerieren kann: $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$.
Dieses Durchnummerieren ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder natürlichen Zahl ν mit $1 \leq \nu \leq n$ eindeutig ein Element m_ν zugeordnet wird, so dass jedes Element $m \in M$ in dieser Nummerierung vorkommt. Man kann dies stets so tun, dass keins der Elemente von M mehrfach erfasst wird.

Man nennt die Anzahl der Elemente von M: $n = \#M =$ Anzahl der Elemente von M.
Die Schreibweise $|M|$ ist für die Anzahl der Elemente von M ebenfalls sehr gebräuchlich.

Natürlich kann man eine endliche Menge M, die mehr als ein Element enthält, auf verschiedene Weisen durchnummerieren. Eigentlich müssten wir auch noch zeigen, dass die Anzahl der Elemente nicht von der speziell gewählten Nummerierung abhängt.

Konvention: Auch die leere Menge $\varnothing$ ist eine endliche Menge. Es gilt: $\#\varnothing = 0$.

(1.31) Bemerkung

Sind $M_1, \ldots, M_n$ endliche Mengen, so ist auch ihre Vereinigungsmenge

$$M = \underbrace{M_1 \cup \cdots \cup M_n}_{\bigcup\limits_{\nu \in \{1,\ldots,n\}} M_\nu} = \{x : x \in M_\nu \text{ für mindestens ein } \nu \text{ mit } 1 \leq \nu \leq n\}$$

endlich.

Beweis: Übungsaufgabe!

(1.32) Bemerkung

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine endliche, nichtleere Menge reeller Zahlen. M besitzt ein Minimum und ein Maximum.

Beweis: Durch Induktion nach $n = \#M$.

Hieraus kann man beispielsweise ableiten, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen nicht endlich ist, denn nach dem archimedischen Prinzip es gibt keine größte natürliche Zahl.
Eine Menge M natürlicher Zahlen ist genau dann endlich, wenn sie nach oben beschränkt ist.

3 Konvergente Folgen

(1.33) Definition

Sei M eine Menge. Eine **Folge** von Elementen aus M ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder natürlichen Zahl n eindeutig ein Element $a_n \in M$ zugeordnet wird.
Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_n).

Im Rahmen der Analysis I interessieren wir uns vor allem für Zahlenfolgen, bspw. ist also $M = \mathbb{R}$.

12.11.2013

(1.34) Beispiele

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (das ist die Folge $1,\ 2,\ 3,\ \dots$)
(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge mit Wert 1)
(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ $(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots)$
(iv) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} = (-1)^{n+1}$

Zu jeder positiven reellen Zahl x existiert nach dem archimedischen Prinzip eine natürliche Zahl N mit $N > x$. Es gilt sogar $n > x \ \forall n \geq N$.
Anders ausgedrückt: Die Folge (i) der natürlichen Zahlen wächst über jede Grenze.

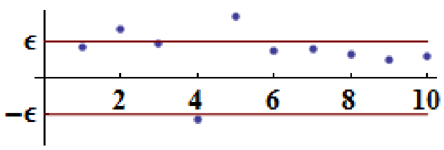
(1.35) Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen wächst über jede Grenze, wenn es zu jeder positiven Zahl x eine natürliche Zahl N gibt mit der Eigenschaft $a_n > x \ \forall n \geq N$.
Nehmen wir vorübergehend an, in der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien alle Folgenglieder $\neq 0$. Dann können wir die reziproke Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden mit $b_n = \frac{1}{a_n},\ n \in \mathbb{N}$.

Offenbar sind dann folgende Aussagen äquivalent: ($\rightarrow$ Beweis)
(i) $|a_n|$ wächst über jede Grenze.
(ii) Zu jeder positiven Zahl $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|b_n| < \epsilon \ \forall n \geq N$.

(1.36) Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass $|a_n| < \epsilon \ \forall n \geq N$ gilt.
In der Definition darf N natürlich von ϵ abhängen. Es ist zu erwarten, dass N umso größer gewählt werden muss, je kleiner das ϵ vorgegeben wird. Wie klein dieses vorgegebene ϵ auch immer sein mag, es muss stets ein solches N existieren![1]



Im Fall, dass alle Folgenglieder a_n von 0 verschieden sind, gilt:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{1}{|a_n|}\right)$ wächst über jede Grenze.
$(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst über jede Grenze $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ist eine Nullfolge.
Beispielsweise ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge, aber kein einziges Glied der Folge ist selbst Null, das heißt, es kann passieren, dass eine Nullfolge den Wert 0 für kein natürliches N erreicht!

[1]Eine sehr schöne und anschauliche Erklärung hierzu liefert auch *Arthur Mattuck* in *Introduction to Analysis*: “Think of a limit demon whose only purpose in life is to make it hard for you to show that limits exist; it always picks unpleasantly small values for ϵ. Your task is, given any ϵ the limit demon hands you, to find a corresponding N such that $a_n < \epsilon$ for $n \geq N$.”

(1.37) Hilfssatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge, so dass $|b_n| \le |a_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \epsilon\ \forall n \ge N$. Dann gilt auch $|b_n| < \epsilon\ \forall n \ge N$. Also ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

(1.38) Bemerkung

(1.37) zeigt, dass beispielsweise auch die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2}\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für ungerade } n \\ 0 & \text{für gerade } n \end{cases}$ Nullfolgen sind, denn sie werden von der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *majorisiert.*

(1.39) Hilfssatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $C \in \mathbb{R}_+$. Dann ist auch die Folge $(Ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis

Sei $\epsilon > 0$. Die Zahl $\frac{\epsilon}{C}$ ist dann ebenfalls positiv. Es existiert daher eine natürliche Zahl $N = N(\frac{\epsilon}{C})$, so dass gilt, $n \ge N \Rightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{C}$. Dann gilt aber auch $n \ge N \Rightarrow |Ca_n| = C|a_n| < C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon$. □

Nun ein etwas komplizierteres Beispiel.

Behauptung: Sei $-1 < a < 1$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a^n\ \forall n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge.

Beweis

Gilt $a = 0$, so ist $a^n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung ist trivial. Man kann also $a \neq 0$ annehmen, also $0 < |a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} = \left|\frac{1}{a}\right| > 1$, also $\left|\frac{1}{a}\right| = 1 + \delta$ mit einer positiven Zahl $\delta > 0$.

Aus der bernoullischen Ungleichung folgt: $\left|\frac{1}{a^n}\right| = \left|\frac{1}{a}\right|^n = (1+\delta)^n \ge 1 + n\delta > n\delta \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{n\delta}$.

Da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, ist nach Bemerkung (1.38) auch $\frac{1}{n\delta}$ eine Nullfolge und nach Hilfssatz (1.37) folgt daraus, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso eine Nullfolge ist.

(1.40) Definition

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Folge $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Mit anderen Worten: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon\ \forall n \ge N$.

Es ist aus der Definition nicht sofort klar, dass diese Zahl a eindeutig ist. Dies muss bewiesen werden.

Beweis

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind.

Wir nehmen $a \neq b$ an und führen dies zu einem Widerspruch. Dazu definieren wir $\epsilon = \frac{1}{2}|a - b| > 0$.[1]

Da $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind, existieren natürliche Zahlen N' und N'', so dass $|a_n - a| < \epsilon\ \forall n \ge N'$ und $|a_n - b| < \epsilon\ \forall n \ge N''$ gelten.

Mit $N := \max\{N', N''\}$[2] gilt $|a_n - a| < \epsilon, |a_n - b| < \epsilon\ \forall n \ge N$.

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\epsilon = |a - b|$. ↯

[1] Wir dürfen ϵ hier selbst wählen, da wir davon ausgehen, dass $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind und wir dies nicht für jedes $\epsilon > 0$ beweisen müssen.

[2] Hier sind (im Gegensatz zu den in der Vorlesung verwendeten runden Klammern) geschweifte Klammern zu benutzen, da „max“ ebenso wie „min“, „sup“ und „inf“ einer Menge als Argument bedarf.

Wegen der Eindeutigkeit von a können wir sagen:
Sprechweise: Wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, so heißt a der **Grenzwert** (Limes) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Man sagt auch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen a.
Schreibweise: Seien $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Wir haben also gezeigt:

(1.41) Satz

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

15.11.2013

(1.42) Beispiele

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
Behauptung: Die Folge konvergiert gegen 1.
Beweis: Es ist $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Nach Hilfssatz (1.37) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(ii) Im folgenden Beispiel setzen wir die Existenz von n-ten Wurzeln voraus. *(Beweis: Kapitel II)*
Zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b^n = a$.
Schreibweise: $b = a^{\frac{1}{n}}$ oder $b = \sqrt[n]{a}$.

Behauptung: Sei $a \geq 1$. Die Folge $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Beweis: Wir setzen $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta n$. Dann ist $\delta \geq 0$, denn $a \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[n]{a} \geq 1$.
Nach der bernoullischen Ungleichung gilt $a = (1+\delta n)^n \geq 1 + n\delta_n \geq 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq \delta_n \leq \frac{a-1}{n} = (a-1)\frac{1}{n}$.
Da $(a-1) \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gelten, ist $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Hilfssätzen (1.37) und (1.39) eine Nullfolge, das heißt, $(1+\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1. $\square$

(iii) Wir betrachten abschließend die Folge $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Behauptung: Diese Folge konvergiert nicht.
Beweis: Angenommen, die Folge konvergiere, dann wäre $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ eindeutig.
Dann gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - (-1)^{n+1}| < \frac{1}{2}$.[1]
Nun gilt aber

$$\begin{aligned} 2 = |(-1)^{n+2} - (-1)^{n+1}| &= |(-1)^{n+2} - a + a - (-1)^{n+1}| \\ &\leq |(-1)^{n+2} - a| + |a - (-1)^{n+1}| \\ &< \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \quad ⚡ \; (2 \not< 1) \end{aligned}$$

$\square$

(1.43) Bemerkung

Angenommen, zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen bis auf endlich viele Folgenglieder überein, das heißt, es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n \;\forall n \geq n_0$.
Dann unterscheiden sich diese beiden Folgen im Bezug auf ihr Konvergenzverhalten nicht, das heißt, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und im Falle der Konvergenz stimmen die Limites überein, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Es gilt: $|a_n - a| < \epsilon \;\forall n \geq \max\{N, n_0\}$.

Beispiel: $\underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{Nullfolge}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} \;\forall n \in \mathbb{N}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} \frac{1}{n} = a_n & \text{für } \mathbb{N} \setminus \{7,\ 201,\ 330\} \\ 1000 & \text{für } 7,\ 201,\ 330 \end{cases}$

Das zu $\epsilon > 0$ zu konstruierende N kann man von vornherein größer als n_0 wählen.

[1] Nicht vergessen: Die Definition der Konvergenz verlangt die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ für jedes $\epsilon > 0$!

Permanenzeigenschaften des Grenzwertbegriffs

(1.44) Satz

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b. Sei $C \in \mathbb{R}$. Dann konvergieren die Folgen $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls und zwar gegen die Grenzwerte $a+b$, Ca, ab und $|a|$. Mit anderen Worten:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot a_n) = C \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$
(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$

Beweis

Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert wegen der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $N(\epsilon) = N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon,\ |b_n - b| < \epsilon\ \forall n \geq N$. Hierbei gilt: $N' = N'(\epsilon)$, so dass $|a_n - a| < \epsilon\ \forall n \geq N'$;
$N'' = N''(\epsilon)$, so dass $|b_n - b| < \epsilon\ \forall n \geq N''$; $N := \max\{N', N''\}$.

(i) Nach der Dreiecksungleichung ist $|(a_n+b_n)-(a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon\ \forall n \geq N$.
Wählt man nun $N^* = N(\frac{\epsilon}{2})$, ist $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \epsilon$, also konvergiert (a_n+b_n) gegen $(a+b)$.

(ii) Nach Hilfssatz (1.39) gilt: $|\underbrace{Ca_n}_{\substack{n\text{-tes}\\ \text{Folgenglied}}} - \overbrace{Ca}^{\substack{\text{potenzieller}\\ \text{Grenzwert}}}| = \underbrace{|C|}_{\geq 0} \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{\text{Nullfolge}}$

(iii) Erneut nach der Dreiecksungleichung gilt
$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_n(b_n-b) + b(a_n-a)| \\ &\leq |a_n|\cdot|b_n-b| + |b|\cdot|a_n-a| \\ &< \epsilon\cdot(|a_n|+|b|)\ \forall n \geq N \end{aligned}$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $|a_n| + |b|$ durch eine von ϵ und n unabhängige Konstante K abgeschätzt werden kann, denn dann können wir zu vorgegebenen ϵ das $N' = N(\frac{\epsilon}{K})$ wählen.

Da $|b|$ bereits von ϵ und n unabhängig ist, reicht es, eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ zu finden mit $|a_n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Diese Eigenschaft konvergenter Folgen ist so wichtig, dass wir sie gesondert formulieren. (*s. (1.45)*)

(iv) Nach der verschärften Dreiecksungleichung gilt: $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\epsilon > 0$ gilt: $|a_n - a| < \epsilon\ \forall n \geq N$.
Es folgt: $\forall \epsilon > 0 : \big||a_n| - |a|\big| < \epsilon\ \forall n \geq N \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$. □

(1.45) Hilfssatz

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Es gibt also ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < C\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Es existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1\ \forall n \geq N$. Es gilt:
$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \forall n \geq N$, also $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, 1+|a|\} =: C$.□

(1.46) Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a und gelten $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $a \neq 0$, so konvergiert auch die reziproke Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ihr Grenzwert ist $\frac{1}{a}$.

Beweis

Wegen $(a_n^{-1} - a^{-1})a_n a = a - a_n$ gilt $|a_n^{-1} - a^{-1}| \cdot |a_n a| = |a - a_n|$, also $|a_n^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a-a_n|}{|a_n a|}$.

Wir sind fertig, wenn wir eine von n unabhängige Zahl $C > 0$ mit $\frac{1}{|a_n a|} \leq C$ finden, denn dann können wir nach (1.37) und (1.39) schließen, dass $(a_n^{-1} - a^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Dies wiederum gilt, falls wir ein $\delta > 0$ mit $|a_n| \geq \delta\ \forall n \in \mathbb{N}$ finden, denn dann können wir $C = \frac{1}{\delta|a|}$ nehmen.

Nun gilt ja: $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, das heißt, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}\ \forall n \geq N$.

Nach der Dreiecksungleichung gilt: $|a_n| - |a| \leq |a_n - a|$, also $|a_n| > \frac{|a|}{2}\ \forall n \geq \mathbb{N}$.
Wähle dann $\delta := \min\{\frac{|a|}{2}, |a_1|, \ldots, |a_n|\}$. $\square$

Bezeichnung:

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so bezeichnen wir die Folgenglieder mit

$$\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{a \in \mathbb{R} | a = a_n \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Beispiel

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ 1 & \text{für } n > 1 \end{cases}$.
Dann ist $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{b_n | n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$.
Die Mengen der Folgenglieder können also identisch sein, ohne dass die beiden Folgen identisch sind.

4 Konvergenzkriterien für Folgen

Wir kennen bislang nur ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Folge:
Eine Folge kann nur konvergent sein, wenn sie beschränkt ist. *(s. (1.45))*
Wir suchen nun auch hinreichende Kriterien für die Konvergenz einer Folge.

(1.47) Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton** wachsend (fallend), wenn gilt:
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$, also $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Monoton fallenden Folgen sind analog definiert, nämlich mit „$\geq$“ anstatt „$\leq$“.
Gilt in dieser Kette nirgendwo das Gleichheitszeichen, so nennt man die Folge **streng monoton**.

(1.48) Satz

Jede monotone und beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{für wachsende Folgen} \\ \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} & \text{für fallende Folgen} \end{cases}$.

Beweis

Für diesen Beweis benötigen wir das Vollständigkeitsaxiom. Es genügt, den Beweis für wachsende Folgen zu führen. Wegen der Beschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Nun gilt nach der Definition des Supremums:
(i) $a \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $b \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \ b \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ b \geq a$
Es folgt: a ist die kleinste obere Schranke von $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. $a - \epsilon$ ist keine obere Schranke mehr von $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Das heißt, $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_N \leq a \ \forall n \geq N$. Aus der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt sogar: $a - \epsilon < a_n \leq a \ \forall n \geq N$ $\Rightarrow \ a - a_n < \epsilon$, also $|a - a_n| < \epsilon \ \forall n \geq N$, da $a_n \leq a$.
Also ist $(|a - a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Daraus folgt: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. □

22.11.2013

Ein Beispiel für eine beschränkte Folge, die <u>nicht</u> konvergiert, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nimmt man von dieser Folge nun die Folgenglieder, für die n gerade ist, erhält man eine konvergente Folge, nämlich die konstante Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{2n} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Es stellt sich die Frage: Ist dies ein allgemeines Phänomen beschränkter Folgen? Existiert zu <u>jeder</u> beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge? Was genau ist eigentlich eine Teilfolge?

Wir präzisieren diesen Begriff: Gegeben seien
(i) eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen
(ii) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, die sog. **Indexfolge**: $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$

Man kann dann die Folge $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, a_{\nu_3}, \cdots$, also $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten.
Es ist wichtig, dass die Zahlenfolge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>streng</u> monoton wächst.

<u>Beispiel:</u> $\begin{array}{cccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, \ \cdots \\ & \uparrow & & & \uparrow & \uparrow \\ & a_{\nu_1} & & & a_{\nu_2} & a_{\nu_3} \end{array}$

Per Induktion zeigt man, dass damit $\nu_n \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Folge $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$, die so aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entsteht, heißt eine **Teilfolge** der ursprünglichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>(1.49) Hilfssatz</u>
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge.
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$.[1] Es gilt zudem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\nu_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>Beweis</u>
Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ferner sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq N$.
Wegen $\nu_n \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$ folgt auch $|a_{\nu_n} - a| < \epsilon \ \forall n \geq N$. □

<u>(1.50) Satz</u> *(Satz von Bolzano-Weierstraß)*
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Beweis</u>
Nach Hilfssatz (1.51) besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge, die nach Satz (1.48) konvergiert. □

---

[1] <u>ALLE</u> Teilfolgen einer konvergenten Folge konvergieren!

(1.51) Hilfssatz

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis

Wir beweisen die Aussage durch Fallunterscheidung unter Betrachtung folgender Eigenschaft (E):
Bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Menge $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\} = \{a_k : k \geq n\}$ ein Maximum.
Anders ausgedrückt: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mu_n \in \mathbb{N},\ \mu_n \geq n$, so dass $a_{\mu_n} \geq a_k\ \forall k \geq n$ gilt.

1. Fall: Die Eigenschaft (E) ist erfüllt.
Wir konstruieren nun eine monoton fallende Teilfolge. Dazu konstruiert man induktiv eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{\nu_{k+1}} := \max\{a_k : k \geq \nu_n\},\ \nu_0 := 1$.
Da (E) erfüllt ist, ist dies möglich. Also
$a_{\nu_1} = \max\{a_n : n \in \mathbb{N}\},\ a_{\nu_2} = \max\{a_k : k > \nu_1\},\ a_{\nu_3} = \max\{a_k : k > \nu_2\},\ \ldots$

Offenbar gilt dann $\nu_n < \nu_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq a_{\nu_3} \geq \ldots$, also $a_{\nu_n} \geq a_{\nu_{n+1}}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Damit ist eine monoton fallende Teilfolge gefunden.

2. Fall: Die Eigenschaft (E) ist nicht erfüllt.
Wir konstruieren eine monoton wachsende Teilfolge.
Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass in der Menge $\{a_N, a_{N+1}, \cdots\} = \{a_n : n \geq N\}$ kein maximales Element existiert. Dann kann aber für $N' \in \mathbb{N}$ mit $N' > N$ in $\{a_n : n > N'\}$ ebenfalls kein Maximum existieren, denn sie unterscheidet sich von $\{a_n : n \geq N\}$ nur um endlich viele Elemente.
Wir definieren nun $\nu_1 := N$ und bestimmen dann $\nu_2 > \nu_1$ mit $a_{\nu_2} > a_{\nu_1}$. Nach Voraussetzung muss so ein ν_2 existieren, denn andernfalls wäre a_{ν_1} ein maximales Element. Man konstruiert so induktiv eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{\nu_k} < a_{\nu_{k+1}}\ \forall k \in \mathbb{N}$.
Damit ist eine streng monotone Teilfolge gefunden. □

(1.52) Hilfssatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \epsilon\ \forall m, n \geq N$.

Beweis

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, existiert $\forall \epsilon > 0$ ein $N = N(\frac{\epsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N$.
Daraus folgt $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ \forall m, n \geq N$. □

(1.53) Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall m, n \geq N$.

(1.54) Satz

Jede (reellwertige) Cauchyfolge konvergiert.

Beweis

Schritt 1: *Zu zeigen:* Jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Dazu bestimmen wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < 1\ \forall m, n \geq N$.
Nach der Dreiecksungleichung gilt $|a_n| - |a_m| \leq |a_n - a_m|$.
Nun setzen wir $m := N$, somit gilt $|a_n| - |a_N| < 1 \ \Leftrightarrow\ |a_n| < 1 + |a_N|\ \forall n \geq N$.

Mit $C := max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N+1}|, 1 + |a_N|\}$ gilt: $-C \leq a_n \leq C \ \Leftrightarrow\ |a_n| \leq C$.
Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. □

Schritt 2: <u>Zu zeigen:</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (1.50) existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ihr Grenzwert sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{\nu_n}$. Wir zeigen nun, dass auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.
Dazu bestimmen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften: [1]
(i) $|a - a_{\nu_n}| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n \geq N$
(ii) $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall m, n \geq N$
Dann gilt $|a - a_n| = |a - a_{\nu_n} + a_{\nu_n} - a_n| \leq |a - a_{\nu_n}| + |a_{\nu_n} - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ \forall n \geq N$. □□

26.11.2013

Das Cauchy-Kriterium liefert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge, in der der hypothetische Grenzwert <u>nicht</u> auftritt.

Ungleichungen und Konvergenz

<u>(1.55) Hilfssatz</u>

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, so dass $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.
Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

<u>Beweis</u>

Sei $c_n := b_n - a_n$. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat dann nur nicht-negative Folgeglieder. Zu zeigen ist, dass dann auch der Grenzwert nicht-negativ ist.

Angenommen, $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ sei < 0. Dann gilt $0 \overset{c<0}{<} -c \overset{c_n \geq 0}{\leq} c_n - c$.
$(c_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, da c der Grenzwert von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
Nach Hilfssatz (1.37) würde folgen: $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n = -c\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist eine Nullfolge. $\lightning$ □

<u>(1.56) Folgerung</u>

Wenn eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine Konstante C (nach oben oder nach unten) beschränkt ist, so trifft dies auch für ihren Grenzwert zu.
Das heißt, $a_n \leq C\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq C$ bzw. $a_n \geq C\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq C$.

<u>Beweis:</u>

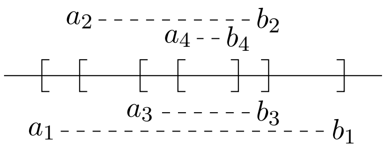
Sei beispielsweise $a_n \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$. Die Aussage folgt aus Hilfssatz (1.55) mit der Wahl $b_n = C\ \forall n \in \mathbb{N}$.□

Das Intervallschachtelungsprinzip

Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Wir definieren $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Im Falle $a = b$ spricht man von einem *degenerierten Intervall*, es besteht nur aus einem Punkt $a = x = b$.

Unter einer **Intervallschachtelung** versteht man eine absteigende Kette $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$.

Diese wird also definiert durch zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Bedingungen:
(i) $a_1 \leq a_2 \leq \dots$, das heißt, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
(ii) $b_1 \geq b_2 \geq \dots$, das heißt, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend
(iii) $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$



---

[1] Die Werte für N aus (i) und (ii) sind im Allgemeinen nicht gleich. Deren Maximum ist das im Kontext relevante N.

(1.57) Satz *(Intervallschachtelungsprinzip)*

Es sei eine Intervallschachtelung durch $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ gegeben.
Dann existiert ein allen gemeinsamer Punkt x und es gilt:
$x \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ x \in [a, b]$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Zusatz
Der Punkt x ist offenbar dann eindeutig bestimmt, wenn $a = b$ gilt, also $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist.

Beweis
Zunächst gilt: (a_n) ist monoton wachsend und beschränkt, denn: $a_1 \leq a_n \leq b_1\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Analog ist $(b_n)n$ monoton fallend und beschränkt.
Somit sind diese nach Satz (1.48) konvergent und es gilt:
$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},\ b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Nun gilt: $x \geq a \ \Rightarrow\ x \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, wegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a$ aber auch $x \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ x \geq a$.
Es gilt: $x \geq a \ \Leftrightarrow\ x \geq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Analog gilt: $x \leq b \ \Leftrightarrow\ x \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. □.

Besonders interessant ist der Fall $a = b$. Hier kann man noch weitere Konsequenzen ziehen.
Setzt man $a_n + R_n =: a$, $b_n + S_n =: b$, [1]
so folgt aus $a_n \leq \underset{\substack{\Uparrow\\ a_n + R_n}}{a} = \underset{\substack{\Uparrow\\ b_n + S_n}}{b} \leq b_n$, dass $R_n \geq 0$ und $S_n \leq 0$ gilt und es folgt: $0 \leq R_n \leq b_n - a_n$.
Analog folgt: $|R_n|, |S_n| \leq |b_n - a_n|$. Dies ist die sogenannte **Restgliedabschätzung**.

Abschlussbemerkung:

Natürlich kann man im Falle $a = b$ die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer einzigen konvergenten Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammenfassen. Beispielsweise:
$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$, also $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_{2n} = b_n$, $c_{2n-1} = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

(1.58) Beispiel *(Die eulersche Zahl e)*

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Offenbar gilt: $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. (ÜA!)
Das heißt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Außerdem gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \underbrace{\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}}_{=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1 \text{ für } n\to\infty} = \frac{a}{b} = 1$, also $a = b$.

Der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Folgen wird nach Euler mit $e := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ bezeichnet.

5 Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen.
Dieser Folge kann man eine neue Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zuordnen, wobei $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Also: $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots$, das heißt, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge der Partialsummen.
Diese Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt auch die der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugeordnete **Reihe**.

[1] R_n und S_n nennt man Restglieder

Bezeichnung

Konvergiert die der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugeordnete Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so schreibt man $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Man sagt: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(1.59) Beispiel

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a^{n-1},\ a \in \mathbb{R},\ 0^0 := 1$.

Behauptung

Die sogenannte **geometrische Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$ konvergiert dann und nur dann, wenn $|a| < 1$ ist.

In diesem Falle gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \dfrac{1}{1-a}$.

Beweis:

$a = 1$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und kann somit nicht konvergent sein.

$a \neq 1$ In diesem Fall gilt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a^{k-1} = \dfrac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a} \cdot a^n$. *(siehe Induktionsbeweis)*

29.11.2013

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dies ist für $|a| < 1$ der Fall. *(s. (1.39))*

Für $a = -1$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Prototyp einer beschränkten, aber nicht konvergenten Folge.

Für $|a| > 1$ ist $|\frac{1}{a}| < 1$ und damit $|\frac{1}{a^n}| = |\frac{1}{a}|^n$, also ist $\left(\left(\frac{1}{|a|}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Somit wächst $|a|^n$ über alle Grenzen, also divergiert $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Da Reihen spezielle Folgen sind, übertragen sich die Rechenregeln von konvergenten Folgen.

Konvergieren $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, das heißt, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $n \in \mathbb{N}$ konvergieren, so konvergieren auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n,\ C \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)}_{=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+S'_n)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{=\lim\limits_{n\to\infty} S_n} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{=\lim\limits_{n\to\infty} S'_n},\quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n}_{\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot S_n)} = \underbrace{C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C\cdot \lim\limits_{n\to\infty} S_n}.$$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so ist $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n = a_{n+1} - a_n$ eine Nullfolge, denn $|\delta_n| = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \overset{\text{D.U.}}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a_n - a|$. Die Beh. folgt aus (1.37).

Wendet man diese Beobachtung auf die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so folgt:

(1.60) Satz

Wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Wir formulieren schlussendlich noch das **Cauchy-Kriterium** für Reihen:

Zu jedem $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |S_n - S_m| < \epsilon\ \forall m, n \geq N$.

Wegen $|S_n - S_m| = |S_m - S_n|$ reicht es, den Fall $m > n$ zu betrachten.

Dann ist $|S_m - S_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon \ \forall m > n \geq N$.
Insbesondere ist das Cauchy-Kriterium erfüllt, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|S_m - S_n| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon \ \forall m > n \geq N$ gilt.

(1.61) Satz

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beweis 1

Die Reihe der Abs.beträge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}},\ T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyf. ist.

Dies ist der Fall, falls gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \ |T_m - T_n| = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|}_{\overset{\text{D.U.}}{\geq} \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |S_m - S_n|} < \epsilon \ \forall m, n \geq N$.

Dann ist aber auch $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ eine Cauchyfolge und konvergiert somit. $\square$

Wir geben für diesen wichtigen Satz einen weiteren Beweis, der nicht das Cauchy-Kriterium benutzt.

Beweis 2

Sei $a'_n = \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, a''_n = \begin{cases} -a_n & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Dann gilt: $a_n = a'_n - a''_n$ und wegen der Permanenzeigenschaften des Grenzwertbegriffs reicht es, zu beweisen, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n$ konvergent sind. $\square$

Die Folgen der Partialsummen $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a'_k,\ n \in \mathbb{N}$ und $(A''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A''_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a''_k,\ n \in \mathbb{N}$ sind aber monoton wachsend. Nach Satz (1.48) reicht es, für ihre Konvergenz nun zu zeigen, dass sie beschränkt sind. Aber wegen $A'_n, A''_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| =: T_n$ ist dies der Fall, da $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, da die Folge nach Voraussetzung konvergent ist.

Sprechweise: Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Wir haben also bewiesen: Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz der Reihe selbst.
Die absolute Konvergenz einer Reihe ist viel einfacher zu studieren als die Konvergenz selbst, denn die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|,\ n \in \mathbb{N}$ ist monoton wachsend. Eine monoton wachsende Folge konvergiert nämlich dann und nur dann, wenn sie beschränkt ist.

(1.62) Satz

Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert genau dann absolut, falls gilt $\exists C \in \mathbb{R} : \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |a_k|}_{(T_n)_{n\in\mathbb{N}}} \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Hieraus folgt das sogenannte **Majorantenkriterium** für unendliche Reihen:

Eine Reihe $\sum b_n$ heißt **Majorante** zu $\sum a_n$, falls $\underbrace{|a_n| \leq b_n}_{\text{insbesondere } b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(1.63) Satz

Eine Reihe konvergiert absolut, wenn sie eine konvergente Majorante hat.

Das Quotientenkriterium

Eine unendliche Reihe $\sum a_n$ heißt mit der geometrischen Reihe vergleichbar, falls es reelle Zahlen $C > 0$ und $0 \leq q < 1$ gibt, so dass $|a_n| \leq C \cdot q^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. [1]
Da die geometrische Reihe $\sum q^{n-1}$ für $|q| < 1$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium die Konvergenz der ursprüunglichen Reihe.
Als Spezialfall des Majorantenkriterium ergibt sich also:

(1.64) Satz *(Quotientenkriterium)*

Sei $\sum a_n$ eine unendliche Reihe, deren Glieder alle von Null verschieden sind. Dann ist eine hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz dieser Reihe: $\exists q \in \mathbb{R},\ 0 \leq q < 1$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq |q| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Per Induktion folgt: $|a_n| \leq |a_1| \cdot q^{n-1} = \underbrace{\frac{|a_1|}{q}}_{C \in \mathbb{R}} \cdot q^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Somit ist die Reihe $\sum a_n$ mit der geometrischen Reihe vergleichbar, also konvergiert sie absolut. $\square$

Wir geben nun noch ein Konvergenzkriterium für nicht notwendig absolut konvergente Reihen.

(1.65) Satz *(Leibniz-Kriterium)*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Beweis

Wir definieren $R_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k,\ A_n := R_{2n},\ B_n := R_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:
(i) Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
(ii) Die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
(iii) $A_n \leq B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
(iv) $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (1.57) konvergieren damit sowohl $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen den selben Grenzwert. Die kombinierte Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit ebenfalls konvergent. $\square$

(1.66) Beispiel

Die Reihe $(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert. Sie ist übrigens ein Beispiel für eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, denn die sogenannte **harmonische Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht.

Beweis

Sei $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton, das heißt, wir müssen zeigen: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt.

[1] Es genügt, wenn dies bis auf endlich viele Ausnahmen gilt.

Wir betrachten folgenden Teilabschnitt dieser Reihe:
$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$
Jeder Summand, der in diesem Teilabschnitt auftritt, ist $\geq \frac{1}{2^{n+1}}$. Die Anzahl der Summanden ist 2^n.
Das heißt, $S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Daraus folgt: $S_2 = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},\ S_4 = S_2 + (S_4 - S_2) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2},\ S_8 = S_4 + (S_8 - S_4) \geq (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2},\ \ldots$
Per Induktion nach n beweist man $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$. Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ können wir die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bilden. Dies ist eine sogenannte **Potenzreihe**. Bislang hatten wir immer von $n = 1$ an aufsummiert, man definiert allgemein $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$. Dabei ist $n_0 \in \mathbb{Z}$ und jeder ganzen Zahl $n \geq n_0$ sei eine reelle Zahl a_n zugeordnet.

Wir werden später untersuchen, für welche $x \in \mathbb{R}$ eine solche Potenzreihe konvergent ist. Hier betrachten wir zunächst nun den Spezialfall, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Demnach ist die Folge $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge.

Hiervon gilt bemerkenswerterweise die Umkehrung:

(1.67) Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(a_n x^n)$ eine Nullfolge ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n x^n$ absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2x \in \mathbb{R}$, also ist $(a_n(2x)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$)
Insbesondere ist sie beschränkt: $|a_n(2x)^n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n x^n| \leq C \cdot \frac{1}{2^n},\ C \in \mathbb{R}$.
Aus dem Majorantenkriterium folgt nun die Behauptung. $\square$.

(1.68) Beispiel

Sei $a_n = \frac{1}{n!}$. Wir zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(\frac{x^n}{n!})$ eine Nullfolge ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Zu diesem $x \in \mathbb{R}$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq [2|x|] + 1 \Rightarrow x^n \leq \frac{N^n}{2^n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Außerdem ist $n! \geq N^{n-N}$ für $n \geq 2N$, also $|\frac{x^n}{n!}| \leq \frac{N^n}{n!2^n} < \frac{N^n}{N^{n-N}2^n} = \underbrace{\frac{N^N}{2^n}}_{\text{Nullfolge}}$. $\square$.

(1.69) Satz

Die Reihe $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung

Es gilt $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

6 Abbildungen und Abzählbarkeit

(1.70) Definition

Seien X und Y zwei Mengen. Eine **Abbildung** f von X nach Y, $f: X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ ist eine Vorschrift, gemäß welcher jedem Element $x \in X$ eindeutig ein bestimmtes Element $y \in Y$ zugeordnet wird. Man schreibt meistens $y = f(x)$ und nennt $f(x)$ das **Bild** von x unter der Abbildung f.

Zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y'$ stimmen genau dann überein, wenn gilt:
$X = X'$, $Y = Y'$ und $f(x) = f'(x)\ \forall x \in X$.

(1.71) Beispiele

(i) Sei X eine Teilmenge von Y, das heißt, $X \subset Y$.
Die **kanonische Injektion** von X nach Y ist definiert durch $i : X \to Y,\ i(x) = x\ \forall x \in X$.

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen einer Menge X ist nichts anderes als eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$.
Normalerweise schreibt man hier a_n statt $a(n)$.

(iii) Ein n-Tupel von Elementen in einer Menge X wird mit X^n bezeichnet:
$X^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in X\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}\}$.
X^1 kann mit X identifiziert werden; eine Abbildung von $a : \underbrace{A_1}_{=\{1\}} \to X$ ist lediglich die Fixierung eines Elements aus X (das Bild von 1 unter a).

Gemäß des Gleichheitsbegriffs von Abbildungen sind zwei n-Tupel $(a_1, \cdots, a_n)$ und $(b_1, \cdots, b_n)$ genau dann gleich, wenn $a_k = b_k\ \forall k \in \{1, \cdots, n\}$. $(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n) \ \Leftrightarrow\ a_k = b_k$ für $1 \le k \le n$.
Den Begriff des n-Tupels kann man auf verschiedene Weise verallgemeinern.

Seien zwei Mengen X und Y gegeben. Dann kann man die Menge der Paare $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\} =: X \times Y$ betrachten, das sogenannte **kartesische Produkt** von X und Y.
Die Gleichheit in $X \times Y$ ist definiert durch: $(x, y) = (x', y') \ \Leftrightarrow\ (x = x') \wedge (y = y')$.
Im Spezialfall $X = Y$ gilt $X^2 = X \times X$.

(iv) Eine Komposition in einer Menge X ist eine Abbildung $\perp: X \times X \to X$.
Man schreibt meistens $a \perp b$ anstelle von $\perp(a, b)$.

(v) Die wichtigsten Abbildungen in dieser Vorlesung sind **reelle Funktionen in einer Variable**.
Diese sind Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ der sogenannte **Definitionsbereich** von f ist.

Beispiel: $D = \mathbb{R}^\bullet = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}\ \forall x \in \mathbb{R}^\bullet$.

(1.72) Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(1) **injektiv** *(eineindeutig)*, wenn verschiedenen Elementen von X verschiedene Elemente von Y zugeordnet sind, das heißt $x, x' \in X, x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x')$ oder äquivalent $f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'$.

(2) **surjektiv** *(eine Abbildung auf)*, wenn jedes Element von Y als Bild mindestens eines Elements von X vorkommt, das heißt $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

(3) **bijektiv** *(eineindeutig auf)*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Was ist mit unseren Beispielen?

(i) Die kanonische Injektion $i : X \to Y,\ i(x) = x\ (X \subset Y)$.
Diese Abbildung ist injektiv. Sie ist dann und nur dann surjektiv, wenn $X = Y$ gilt und $i = \mathrm{id}_X$ gilt. Offenbar ist die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X, \mathrm{id}_X(x) = x\ \forall x \in X$ bijektiv.

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, wenn alle Folgenglieder verschieden sind, beispielsweise $a_n = \frac{1}{n}$.
Sie muss aber nicht injektiv sein, beispielsweise $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ oder $a_n = (-1)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Schwieriger ist die Frage, ob a surjektiv sein kann. Wir werden noch zeigen, dass solch eine Folge nicht existiert.

(v) Noch ein paar spezielle Funktionen:
a) $f : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^\bullet$.
Diese Funktion ist injektiv, aber nicht surjektiv, denn $0 \neq \frac{1}{x}\ \forall x \in \mathbb{R}^\bullet$.
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.
f ist nicht injektiv, denn $(-x)^2 = x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Sie ist auch nicht surjektiv, denn $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$.
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$.
[Wir zeigen später:] f ist bijektiv.

Zusammensetzung von Abbildungen

Seien drei Mengen X, Y, Z gegeben und ferner zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$.
Dann kann man die Abbildung $h : X \to Z$ bilden, die durch $h(x) = \underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{\in Y})}_{\in Z}$ definiert ist.

Schreibweise: $h = g \circ f$.

Beispiel
Sei f die Komposition $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f((a,b)) = a - b$ bzw $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (a,b) \underbrace{\mapsto}_{\text{„wird abgebildet auf“}} a - b$.

g sei gegeben durch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.
Dann ist $h = g \circ f$ die Komposition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto (a-b)^2$.

(1.73) Bemerkung
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen.
Sind f und g beide injektiv, surjektiv oder bijektiv, so trifft dies jeweis auch auf $g \circ f$ zu.

(1.74) Definition
Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ eine Teilmenge.
Die **Bildmenge** $f(A)$ von A unter f ist definiert als die Menge $\{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$.
Folglich gilt: f ist surjektiv genau dann, wenn $f(X) = Y$ gilt. Allgemein nennt man $f(X)$ das **Bild** von f, gelegentlich wird Y auch als **Ziel** bezeichnet.

(1.75) Definition
Das **Urbild** einer Teilmenge $B \subset Y$ ist definiert als $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Beispiel
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. $C = \{y \in \mathbb{R} : y < 0\}$. Dann gilt $f^{-1}(C) = \varnothing$.

Beachte: Die Menge $f^{-1}(B)$ kann aus sehr vielen Elementen bestehen, selbst wenn B aus einem einzigen Element besteht, das heißt, $B = \{b\},\ b \in Y$.
Im obigen Beispiel ist $f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\}$.
Ist f jedoch bijektiv, so besteht die Menge $f^{-1}(\{b\})$ aus genau einem Element und wird mit $f^{-1}(b)$ bezeichnet, also $f^{-1}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$.

(1.76) Definition

Im Fall einer bijektiven Abbildung (und nur in diesem Fall) erhalten wir so die sogenannte **Umkehrabbildung** $f^{-1} : Y \to X$.
Diese ist dadurch definiert, dass sie jedem Element $y \in Y$ das Element $f^{-1}(y) \in X$ zuordnet.

Beispiel
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ ist eine bij. Abb. mit der Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Nochmal: Umkehrabbildungen kann man nur von bijektiven Abbildungen bilden.

10.12.2013

(1.77) Hilfssatz

$f : X \to Y$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\exists g : Y \to X$ mit (i) $f \circ g = id_Y$
(ii) $g \circ f = id_X$.
In diesem Fall ist $g = f^{-1}$.

Beweis
„$\Leftarrow$“ Injektivität: Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Es folgt $x \overset{\text{(ii)}}{=} g(f(x)) = g(f(x')) \overset{\text{(ii)}}{=} x'$. □
Surjektivität: Sei $y \in Y$. Setze $x := g(y) \in X$. Es folgt $f(x) = f(g(y)) \overset{\text{(i)}}{=} y$. □
„$\Rightarrow$“ folgt direkt mit $g := f^{-1}$.

Zusatz
Es ist nur die Eindeutigkeit von g, welches (i) und (ii) erfüllt, zu zeigen.
Seien also g_1, g_2 zwei Funktionen, die (i) und (ii) erfüllen.
Sei $y \in Y$ beliebig. Es folgt $g_1(y) \overset{f\circ g_2 = id_Y}{=} g_1(f(g_2(y))) \overset{g_1 \circ f = id_X}{=} g_2(y)$. □

Mächtigkeit und Abzählbarkeit

(1.78) Definition

Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.

Schreibweise: $X \sim Y$
Bemerkung
Offenbar gelten die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation, d.h.
(i) $X \sim X$ denn $id_X : X \to X$ ist bijektiv *(Reflexivität)*
(ii) $X \sim Y \ \Leftrightarrow\ Y \sim X$ denn $f : X \to Y$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $f^{-1} : Y \to X$ ist bijektiv *(Symmetrie)*
(iii) $X \sim Y, Y \sim Z \ \Rightarrow\ X \sim Z$ denn $f : X \to Y, g : Y \to Z$ bij. $\overset{(1.73)}{\Rightarrow}$ $g \circ f : X \to Z$ bij. *(Transitivität)*

(1.79) Definition

Eine Menge X heißt **abzählbar**, falls $X \sim \mathbb{N}$, d.h. es existiert eine bijektive Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$.

Bemerkung
Mit anderen Worten, man kann die Elemente von X in einer Folge $(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anordnen, so dass jedes Element aus X in der Folge vorkommt *($\Rightarrow$ surjektiv)*, und zwar genau einmal. *($\Rightarrow$ injektiv)*

(1.80) Bemerkung

Definitionsgemäß hat eine Menge X n Elemente, falls $X \sim A_n = \{1, \cdots, n\}$.
Zwei endliche Mengen sind also gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente haben.
Der Mächtigkeitsbegriff verallgemeinert daher den Begriff der Anzahl auf unendliche Mengen.
Im Gegensatz zu endlichen Mengen kann es passieren, dass $X \sim Y$, aber $X \subset Y$. ($X \not\supset Y$)
Beispiel: $X = \mathbb{N}_2 := \{n \in \mathbb{N} | n \text{ gerade}\},\ Y = \mathbb{N}$. $f : Y \to X, n \mapsto 2n$ ist bijektiv.

(1.81) Satz

Sei X eine abzählbare Menge und Y eine beliebige unendliche Menge.
Dann ist Y auch abzählbar, falls (i) oder (ii) gilt:
(i) $\exists g : Y \to X$ injektiv,
(ii) $\exists f : X \to Y$ surjektiv.

Beweis

Sei o.B.d.A. $X = \mathbb{N}$, ansonsten betrachte man eine Verkettg. von f bzw. g mit einer Bij. zw. X, $\mathbb{N}$.
(i) Sei also $g : Y \to \mathbb{N}$ injektiv. Dann ist $\bar{g} : Y \to g(Y), y \mapsto g(y)$ bijektiv, d.h. $Y \sim M := g(Y) \subset \mathbb{N}$.
Es reicht daher, zu zeigen, dass M abzählbar ist.
Setze dazu $m_1 := \min(M)$, $\underbrace{m_2 := \min(M \setminus \{m_1\})}_{> m_1}$, $\cdots$, $\underbrace{m_n := \min(M \setminus \{m_1, \cdots, m_{n-1}\})}_{> m_{n-1}}$.
Die entstandene Abbildung $m : \mathbb{N} \to M, n \mapsto m_n$ ist injektiv, da streng wachsend und surjektiv nach Konstruktion.
(ii) Wir führen auf (i) zurück und konstruieren $g : Y \to \mathbb{N}$ injektiv.
Setze $g(y) := \min \underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{\neq \emptyset,\ \text{da} f \text{ surj.}} \in \mathbb{N}$.

g ist injektiv, denn sind $y_1, y_2 \in Y$ mit $g(y_1) = g(y_2)$, so gilt $\begin{array}{l} g(y_1) \in f^{-1}(\{y_1\}) \\ \shortparallel \\ g(y_2) \in f^{-1}(\{y_2\}) \end{array}$, also
$\bar{n} := g(y_1) \in f^{-1}(\{y_1\}) \cap f^{-1}(\{y_2\}) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = y_1, f(n) = y_2\}$, also $y_1 = f(n) = y_2$.

(1.82) Definition

Eine Menge X heißt **höchstens abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar ist.

Bemerkung

Satz (1.81) hat zur Folge:
1) Jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.
(die kanonische Injektion ist injektiv)
2) Das Bild einer höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.
($f : X \to Y$ beliebig $\Rightarrow$ $\bar{f} : x \to f(X), x \mapsto f(x)$ surjektiv)

(1.83) Beispiele

a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Formal: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$
b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n, m) \mapsto 2^n \cdot 3^m$ injektiv nach Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.
c) Verallgemeinerung von b): X, Y höchstens abzählbar $\Rightarrow$ $X \times Y$ höchstens abzählbar.
d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.
Beweis: $X = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ ist abzählbar als unendliche Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nach c).
Ferner ist $f : X \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ surjektiv. Aus Satz (1.81) folgt die Behauptung. □

e) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} | a_k \in \{0,1\} \ \forall k\}$, also die Menge der Folgen mit Folgengliedern in $\{0,1\}$ ist **überabzählbar**, das heißt, unendlich und nicht abzählbar.

Beweis *(Cantorsches Diagonalverfahren)*
Angenommen $\exists f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bijektiv.
Schreibe $f(n) = f_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots) = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$.
Betrachte die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $b_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } a_k^{(k)} = 0 \\ 0 & \text{falls } a_k^{(k)} = 1 \end{cases}$
Wegen $b_n \neq a_n^{(n)} \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist insbesondere $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \neq (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Daher ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \notin f(\mathbb{N})$ Widerspruch zur Surjektivität von f.

f) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis
Wir geben eine injektive Abbildung $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ an, dann kann $\mathbb{R}$ nicht mehr abzählbar sein.
Wir setzen $g((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} = \underbrace{0, a_1a_2a_3a_4}_{\text{Dezimalschreibweise}}.$
Wegen der „Eindeutigkeit“ (ohne Beweis) der Dezimalschreibweise reeller Zahlen ist g injektiv. [1] $\square$

13.12.2013

7 Umordnungssätze für unendliche Reihen

Frage:
Inwiefern gelten Distributiv-, Kommutativ- und Assoziativgesetze für unendliche Reihen?
Zunächst: Kommutativgesetze für endliche Summen:
$(a_1, \cdots, a_n)$ n-Tupel reeller Zahlen.
$(a_{\nu_1}, \cdots, a_{\nu_n})$ sei eine Umordnung des n-Tupels, das bedeutet:
$\exists$ bijektive Abb. $\nu : A_n \to \underbrace{A_n}_{\{1,\cdots,n\}\text{, also ein } n\text{-Tupel, in dem jede Zahl zwischen } 1,2,\cdots,n \text{ genau einmal vorkommt.}}$

Beispiel: $n = 2$, $(\underbrace{\nu_1}_{\nu(1)}, \underbrace{\nu_2}_{\nu(2)}) = (2,1)$

Dies bewirkt die Umordnung $(a_1, a_2) \mapsto (a_2, a_1) = (a_{\nu_1}, a_{\nu_2})$.
Mithilfe der Körperaxiome beweist man:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu_k}$$

Denn auf die Reihenfolge kommt es bei der Addition nicht an.
$(a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c)$ etc.)

Betrachten wir nun eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ eine Umordnung dieser Reihe.

Hier kommt in der Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jede natürliche Zahl genau einmal vor, d.h. Abb $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.

[1] Anmerkung: Mit der „Eindeutigkeit“ ist hier gemeint, dass dieselbe Ziffernfolge niemals zwei unterschiedliche Zahlen bezeichnen kann. Nicht eindeutig hingegen ist, wie $x \in \mathbb{R}$ in Dezimalschreibweise geschrieben wird, bspw. $0,999\ldots = 1$.

$\{\nu_n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},\ \nu_k \neq \nu_j$ für $k \neq j$.

Angenommen, die Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ (kurz: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere gegen a. ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$)

Gilt dies auch für die umgeordnete Reihe $(\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\nu_k}$ (kurz: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$)?

(1.84) Satz *(kleiner Umordnungssatz)*

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere absolut (das heißt, die monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}},\ T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergiert) und zwar gegen den Wert $a \in \mathbb{R}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a$.

Dann konvergiert auch jede Umordnung, und zwar gegen denselben Wert a.

Beweis

Der Beweis ist in zwei Teile untergliedert:

(i) Absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe

Da die Reihe $\sum |a_n|$ der Absolutbeträge (monoton wachsend ist und) konverigert, ist sie beschränkt:

$\exists C \in \mathbb{R} : \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt aber auch $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{\nu_k}| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}$, denn $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{\nu_k}| \leq \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|$ mit $N := \max\{\nu_1, \cdots, \nu_n\}$.

Nach Satz (1.67) ist $\sum a_{\nu_k}$ somit absolut konvergent.

(ii) Der Grenzwert der umgeordneten Reihe ist ebenfalls a.

Sei $\epsilon > 0$. Da die Reihe absolut konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\Big| \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|}_{\text{Grenzwert der Reihe der Absolutbeträge}} - \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \Big| < \epsilon\ \forall n \geq N$, d.h. $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon\ \forall n \geq N$.

Sei nun $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass $A_N = \{1, \cdots, N\} \subset \{\nu_1, \cdots, \nu_M\}$ und sei $m \geq M$.

Dann gilt $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{\nu_j} = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j + \text{Rest}(m, N)$.

$\text{Rest}(m, N)$ ist die Summe aus allen Gliedern aus $\{a_{\nu_1}, \cdots, a_{\nu_m}\}$, deren Indizes $\nu_k > N$ sind.

$$\Rightarrow \Big| \sum_{j=1}^{m} a_{\nu_j} - \underbrace{a}_{\text{Grenzwert der ursprünglichen Reihe}} \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j + \text{Rest}(m,N) - a \Big| \leq \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j - a \Big| + |\underbrace{\text{Rest}(m,N)}_{\sum\limits_{\substack{j\leq\nu_n \\ j>N}} |a_j|}|.$$

$$\Big| \sum_{j=1}^{N} a_j - \underbrace{a}_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n} \Big| = \Big| \sum_{j=N+1}^{\infty} a_j \Big| = \Big| \lim_{\ell\to\infty} \sum_{j=N+1}^{\ell} a_j \Big| = \lim_{\ell\to\infty} \Big| \sum_{j=N+1}^{\ell} a_j \Big| \leq \lim_{\ell\to\infty} \sum_{j=N+1}^{\ell} |a_j| = \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \epsilon.$$

Also: $\Big| \sum\limits_{j=1}^{m} a_{\nu_j} - a \Big| < 2\epsilon\ \forall m \geq M$. □

(1.85) Bemerkung

Wenn man nicht die absolute Konvergenz voraussetzt, ist der kleine Umordnungssatz falsch.

Dazu folgendes Beispiel – $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Zahlen mit ungeradem Index $a_1 > a_3 > a_5 > \cdots$ seien alle positiv.

(ii) Die Teilreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ konvergiert nicht.

(iii) Die Zahlen mit geradem Index $a_2 < a_4 < a_6 < \cdots$ sind alle negativ.

Beispielsweise also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so konvergiert auch die Folge $a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2(k-1)}$ nicht.

$\Rightarrow$ Teilreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2(k-1)}$ unbeschränkt für beliebiges ungerades n.
D.h. zu jedem $C \in \mathbb{R}$ und ungeradem $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ ungerade Zahl $N \geq n$ mit $a_n + a_{n+2} + \cdots + a_N > C$.
Nun bestimmen wir sukzessive ungerade natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ so dass
$a_1 + a_3 + \cdots + a_{n_1} + a_2 > 1$
$a_{n_1+2} + a_{n_1+4} + \cdots + a_{n_2} + a_4 > 1$
$a_{n_2+2} + a_{n_2+4} + \cdots + a_{n_3} + a_6 > 1$

17.12.2013

Verallgemeinern wir den Begriff der absoluten Konvergenz nun auf beliebige abzählbare Mengen.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\leftarrow$ Indexmenge **Folge**
Allgemeiner: $(a_s)_{s\in S}$ $\leftarrow$(abstrakte) abzählbare Indexmenge durch S parametrisierte **Schar**.

Wir wollen $\sum_{s\in S} a_s$ definieren.
Dies ist nicht kanonisch, da auf S zunächst keine natürliche Ordnung existiert!
Also brauchen wir eine bijektive Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to S$.
Idee: Definiere $\sum_{s\in S} a_s := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$. $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge.
Aber: Diese Definition ist nur sinnvoll, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ nicht von der speziellen Anordnung $\nu_1, \nu_2, \cdots$ abhängt! Offenbar ist dies der Fall, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ absolut konvergiert!
Automatisch ist dies nach dem kleinen Umordnungssatz dann für alle Umordnungen der Fall. Also:

(1.86) Definition
Eine Schar $(a_s)_{s\in S}$ reeller Zahlen heißt **summierbar**, wenn es eine Anordnung (ν_n) gibt, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ abs. konvergiert. Ist $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\nu_k}$ der Wert dieser Reihe, so schreibt man $a = \sum_{s\in S} a_s$.

Bemerkung:
Anstatt „die Schar $(a_s)_{s\in S}$ ist summierbar" sagt man auch „die Reihe $\sum_{s\in S} a_s$ konvergiert absolut".

Beispiele:
(i) $S = \mathbb{Z},\ a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, z \mapsto a_z$.
Häufig schreibt man $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ anstelle von $\sum_{z\in\mathbb{Z}} a_z$.
Die Reihe konvergiert genau dann absolut, wenn eine spezielle Anordnung absolut konvergiert, beispielsweise $a_0 + a_1 + a_{-1} + a_2 + a_{-2} + \ldots$.

Insbesondere konvergieren dann die Teilreihen $\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}^{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n}$ und $\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}}^{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{-n}}$ absolut, da $S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ und $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_{-k}|$ sowohl monoton wachsend als auch beschränkt sind, denn $|a_0| + |a_1| + |a_{-1}| + \cdots + |a_n| + |a_{-n}| \leq C < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$.

Umgekehrt folgt aus der absoluten Summierbarkeit von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ die Summierbarkeit von $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, denn $|a_0|+|a_1|+|a_{-1}|+\dots+|a_n|+|a_{-n}| \leq |a_0|+\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|}_{\leq C}+\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{-k}|}_{\leq C}$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $S = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ Schar $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, parametrisiert durch Paare natürlicher Zahlen. Diese spezielle Schar nennt man auch **Doppelfolge**.
Man kann sie übersichtlich wie folgt anschaulich anordnen.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

(1.88) Bemerkung

Ist $(a_s)_{s\in S}$ eine durch eine endliche Menge S parametrisierte Schar reeller Zahlen, vereinbaren wir, da Summen mit endlich vielen Summanden jeweils beliebig umgeordnet werden können:
Alle Scharen $(a_s)_{s\in S}$, die durch endliche Mengen S parametrisiert werden, sind summierbar.
Im Fall $S = \varnothing$ definiert man $\sum\limits_{s\in\varnothing} a_s := 0$.

(1.89) Definition

Sei S eine abzählbare Menge. Eine Zerlegung von S ist eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen in S, so dass jedes Element von S in genau einer der Teilmengen S_n enthalten ist, also
(i) $\underbrace{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n} := \{x \in S : x \in S_n \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}$.
(ii) $S_n \cap S_m = \varnothing$ für $m \neq n$.

Der nachflgnd. Satz beinhaltet Kommutativitäts- und Assoziativitätseigenschaften für unendl. Reihen:
(1.90) Satz *(Großer Umordnungssatz)*

Es sei eine Zerlegung $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ einer abzählbaren Menge S gegeben.
Sei außerdem $(a_s)_{s\in S}$ eine durch S parametrisierte summierbare Schar reeller Zahlen. Dann gilt:
(i) Die Teilscharen $(a_s)_{s\in S_n}$ sind summierbar, die Zahlen $A_n = \sum\limits_{s\in S_n} a_s$ für $n \in \mathbb{N}$ also wohldefiniert.
(ii) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ist absolut konvergent und es gilt: $\sum\limits_{s\in S} a_S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum\limits_{s\in S_n}^{a_s}\right)}_{A_n}$

Ergänzung

Aus der Summierbarkeit der Scharen $(|a_s|)_{s\in S_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und der (absoluten) Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n := \sum\limits_{s\in S_n} |a_s|$ folgt die Summierbarkeit von $\sum\limits_{s\in S} a_s$.

Beweis

Für den Beweis benötigen wir:
(a) Eine Schar $(a_s)_{s\in S}$ ist genau dann summierbar, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\sum\limits_{s\in T} |a_s| \leq C$ für jede endliche Teilmenge $T \subset S$ gilt. In diesem Fall ist $\sum\limits_{s\in S} |a_s| \leq C$.

Folgerung:
Ist $(a_s)_{s\in S}$ summierbar und $S_0 \subset S$ eine Teilmenge, so ist auch die Teilschar $(a_s)_{s\in S_0}$ summierbar und es gilt $\sum\limits_{s\in S_0} |a_s| \leq \sum\limits_{s\in S} |a_s|$.

(b) Wenn eine Schar $(a_s)_{s\in S}$ summierbar ist, so existiert zu jeder positiven Zahl $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $T \subset S$ mit der Eigenschaft $\sum\limits_{s\in S\setminus T} |a_s| < \epsilon$.

Nun zum Beweis des großen Umordnungssatzes:
$(a_s)_{s\in S}$ ist nach Voraussetzung summierbar.
Sei $A = \sum\limits_{s\in S} a_s,\ a_n = \sum\limits_{s\in S_n} a_s,\ n \in \mathbb{N}$.

Es ist nun $A - (\overbrace{A_1 + \cdots + A_n}^{\sum_{k=1}^n A_k}) = \sum\limits_{s\in S\setminus\{\bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k\}} a_s$.

Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $T = T(\epsilon) \subset S$ mit $\sum\limits_{s\in S\setminus T} |a_s| < \epsilon$.
Jedes Element der Menge T muss in irgendeinem $S_n,\ n \in \mathbb{N}$ enthalten sein.
Für $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist $T \subset S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_N = \bigcup\limits_{k=1}^{N} S_k$.

$|A - (A_1 + \cdots + A_n)| \leq \sum\limits_{s\in S\setminus T} |a_s|\ \forall n \geq N$.

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ist konvergent mit Grenzwert A. Wir haben allerdings noch nicht gezeigt, dass diese Reihe sogar absolut konvergiert. Dies folgt mit denselben Argumenten aber unmittelbar, wenn man in der obigen Notation die Schar $(|a_s|)_{s\in S}$ anstelle von $(a_s)_{s\in S}$ betrachtet. $\square$

Beweis der Ergänzung: Übungsaufgabe!

(1.91) Beispiel *(Doppelreihe)*

$S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, also $\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$

Verschiedene Zerlegungen von S:
(i) $S_n = \{(a,b) \in S : b = n\}$ (n-te Spalte im obigen Schema)
(ii) $S_n = \{(a,b) \in S : a = n\}$ (Zeilenzerlegung)
(iii) $S_n = \{(a,b) \in S : a + b = n\}$ (Diagonalenzerlegung) *(welche Diagonalen?)*
Die Mengen S_n sind in diesem Fall endlich.

Dies ist eine Doppelfolge $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ also $a = (a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
Angenommen, $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{n,m}$ konvergiere absolut.

$$\overset{\text{großer Umordnungssatz}}{\Rightarrow} \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\mu+\nu=n} a_{\mu,\nu}\right).$$ [1]

In diesem Spezialfall nennt man den großen Umordnungssatz auch **Cauchyschen Doppelreihensatz**.

Distributivgesetze für unendliche Reihen

(1.92) Satz

Seien $(a_s)_{s\in S}, (b_t)_{t\in T}$ zwei summierbare Scharen reeller Zahlen. Dann ist auch die Schar $(a_s \cdot b_t)_{(s,t)\in S\times T}$ summierbar und es gilt $\left(\sum\limits_{s\in S} a_s\right) \cdot \left(\sum\limits_{t\in T} b_t\right) = \sum\limits_{(s,t)\in S\times T} a_s b_t$.

[1] Die verschiedenen Möglichkeiten, die Summen zu schreiben, entsprechen den oben genannten möglichen Zerlegungen!

Der Beweis ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem großen Umordnungssatz.

Anwendung 1: Ausmultiplizieren von Potenzreihen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Angenommen, die beiden Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ konvergieren für alle $x \in D \subset \mathbb{R}$ absolut.
Dann erhält man: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n = \sum\limits_{\mu+\nu=n} a_\mu b_\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}$.

20.12.2013

Anwendung 2: Lösung einer Potenzreihe, die $\forall x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert und Lösung der Funktionalgleichung $P(x+y) = P(x)\cdot P(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ ist.
Dabei bezeichne $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Wert der Potenzreihe an der Stelle x.
Das Problem ist nur dann gelöst, wenn wir die Koeffizienten folgenden Bedingungen unterwerfen:
(i) $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge für alle $x \in \mathbb{R}$
(ii) Es gilt: $\sum\limits_{\nu+\mu=n} a_\nu x^\nu a_\mu y^\mu = a_n \underbrace{(x+y)^n}_{\sum\limits_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}}$

Man kann offenbar $a_n = \frac{1}{n!}$ wählen. Insbesondere ist (i) damit erfüllt (Beispiel (1.68)).

(1.93) Satz

Die Reihe $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dots$.
Diese konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut.
Sie genügt der Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2 Stetige Funktionen

1 Begriff der Stetigkeit

(2.1) Definition

Eine Funktion f einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ mit einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$.

Bezeichnung: D **Definitionsbereich** von f,
$f(D) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x) \text{ für ein } x \in D\}$ **Wertevorrat** (Bild) von f.

Beispiele:

(i) $D = \mathbb{R}^\bullet : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f = \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.
Wertevorrat: $\mathbb{R}^\bullet$

(ii) Die konstante Funktion mit Wert a.
$D \subset \mathbb{R}$, aber nicht leer.
$f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto a$.
Wertevorrat: $\{a\}$

(iii) Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

(2.2) Definition

Eine Menge D reeller Zahlen heißt **Intervall**, falls mit je zwei Punkten $a, b \in D,\ a < b$ auch jeder zwischen a und b liegende Punkt in D enthalten ist, das heißt, $a < x < b \ \Rightarrow\ x \in D$.
Es gibt verschiedene Arten von Intervallen:

I Die endlichen Intervalle

Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen.

(i) **abgeschlossenes Intervall**
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (insbesondere $a, b \in [a, b]$)

(ii) **offenes Intervall**
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (also $a, b \notin (a, b)$)

(iii) **halboffene Intervalle**
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (also $a \in [a, b),\ b \notin [a, b)$)
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (also $a \notin (a, b],\ b \in (a, b]$)

II Die unendlichen Intervalle

(i) **rechte Halbgeraden**
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

(ii) **linke Halbgeraden**
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
$(-\infty, b) =: \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

(iii) $\mathbb{R}$ selbst ($\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$).

Der Punkt a bzw. b heißt der linke bzw. rechte Randpunkt von D.
Hierbei ist allerdings der degenerierte Fall auszuschließen.
In diesem Fall gilt $[a, a] = \{a\},\ (a, a) = \varnothing$

(2.3) Satz

In der obigen Liste kommen alle Intervalle im Sinne der Definition (2.2) vor. Das Resultat wird mithilfe des Vollständigkeitsaxioms und Fallunterscheidungen gezeigt. Wir skizzieren nun kurz einen Fall.
Das Intervall D sei nach unten, aber nicht nach oben beschränkt. Sei $a = \inf D$. Aus der Definition des Intervalls leitet man ab: $(a, \infty) \subset D$.
Somit ist $D = [a, \infty)$ oder $D = (a, \infty)$.

(2.4) Hilfssatz

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt aus D.
Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus D, die gegen a konvergiert. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
(ii) Zu jeder Zahl $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| \le \epsilon$ falls $|x - a| \le \delta$ und $x \in D$.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii) Wir schließen indirekt.
Angenommen, es existiert ein $\epsilon > 0$, das die in (ii) geforderte Eigenschaft nicht besitzt.
Zu jedem $\delta > 0$ existiert dann ein $x \in D$ mit $|x - a| \le \delta$ aber $|f(x) - f(a)| > \epsilon$.
Nutzen wir dies nun speziell mit $\delta = \frac{1}{n}$, finden wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $|a_n - a| \le \frac{1}{n}$ aber $|f(a_n) - f(a)| > \epsilon$. Es gilt dann $a_n \to a$ und (i) $f(a_n) \to f(a)$. ↯
(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen δ wie in (ii) und bestimmen dann $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \le \delta \ \forall n \ge N$.
Es folgt $|f(a_n) - f(a)| \le \epsilon \ \forall n \ge N$ also $f(a_n) \to f(a)$. □

Um die Bedingung (ii) noch einmal anschaulicher zu formulieren:
Die Funktionswerte $f(x)$ liegen beliebig nahe an $f(a)$, wenn x nur genügend nahe an a liegt.

(2.5) Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Sei $a \in D$. Dann heißt die Funktion f **stetig** in a, wenn die in Hilfssatz (2.4) formulierten Bedingungen erfüllt sind.
Die Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

(2.6) Beispiele

(i) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \ \forall x \in \mathbb{R}$ ist stetig.
(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \ \forall x \in \mathbb{R}$ ist stetig.
(iii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ist stetig:
Der Beweis hiervon ergibt sich aufs der Charakterisierung der Stetigkeit aus dem Hilfssatz (2.4)(i) und der Permanenzeigenschaft für konvergente Folgen: $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \ \Rightarrow \ a_n^3 \to a^3$.

10.1.2014

(2.7) Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, welches nicht nur aus einem Punkt besteht. Es sei $a \in D$.
Außerdem sei eine Funktion $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ oder $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben.
Der Grenzwert von f für x gegen a existiert, wenn sich f in a hinein stetig fortsetzen lässt.
Das bedeutet, es gibt eine stetige Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x) \ \forall x \in D \setminus \{a\}$.

Vorsicht: f *kann*, *muss* aber nicht in a definiert sein; dies spielt in dieser Definition keine Rolle.

(2.8) Bemerkung

Unter den Voraussetzg. von Def. (2.7) ist die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ – falls existent – eindeutig bestimmt!

Beweis

Da $D \subset \mathbb{R}$ ein nicht degeneriertes Intervall ist, ex. eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq a$, $a_n \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Da $\tilde{f}$ stetig ist, gilt notwendigerweise $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$. $\square$

Bezeichnung

Sei $b = \tilde{f}(a)$. Dann schreibt man $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ oder $f(x) \to b$ für $x \to a$. Den Begriff des Grenzwerts kann man auch direkt einführen, ohne auf den Begriff der Stetigkeit zurückzugreifen:
Die Funktion f konvergiert für $x \to a$ gegen b, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit
$x \neq a,\ x \in D,\ |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \epsilon.$

(2.9) Beispiel

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, also sei $|h(x)| \leq C\ \forall x \in \mathbb{R}$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$.
Wir bilden die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = xh(\frac{1}{x})$. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit demselben Definitionsbereich D.
Dann sind die Funktionen $f + g,\ f \cdot g,\ Cf\ (C \in \mathbb{R}),\ \underbrace{\frac{1}{f}}_{\text{falls } f(x)\neq 0\ \forall x\in D}$ definiert:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad (Cf)(x) := Cf(x), \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)}.$$

(2.10) Anmerkung

(i) Die Funktion $\frac{1}{f}$ hat nichts mit der im nächsten Abschnitt definierten Umkehrfunktion f^{-1} zu tun!
(ii) Die Menge aller Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man bezeichnet ihn mit $\mathbb{R}^D$. Für $D = \{1, \ldots, n\}$ erhält man den $\mathbb{R}^n$, denn die Fkt. sind dann lediglich n-Tupel reeller Zahlen.

(2.11) Bemerkung

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf dem Intervall D. Wenn f und g im Punkt $a \in D$ stetig sind, so gilt dies auch für die Funktionen $f + g,\ f \cdot g,\ Cf\ (C \in \mathbb{R}),\ \frac{1}{f}$ (falls $f(x) \neq 0\ \forall x \in D$).

Wir erhalten analog zu Folgen also die Permanenzeigenschaften des Grenzwertbegriffs: Es gelten
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
$\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$,
falls die Limites auf der rechten Seite existieren, und im letzten Fall für $f(x) \neq 0\ \forall x \in D,\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$.

Ineninandersetzen von Funktionen

Gegeben seien zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D'$.
Dann kann man die Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = g(f(x))$ definieren.
Diese bezeichnet man mit $h = g \circ f$.

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$. $\quad g : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. $\quad h = g \circ f : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(f(x)) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(2.12) Bemerkung

Es seien zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R},\ g : D' \to \mathbb{R}$ auf Intervallen $D,\ D' \subset \mathbb{R}$ gegeben und $f(D) \subset D'$. Sei $a \in D$ und $b = f(a) \in D'$. Wenn die Funktion f in a und die Funktion g in b stetig ist, so ist die Zusammensetzung $g \circ f$ in a stetig.

Kurz gesprochen: Stetigkeit bleibt beim Ineinandersetzen von Funktionen erhalten!

Beweis
Sei $\epsilon > 0$. g ist stetig in b, also existiert ein zugehöriges $\delta' > 0$ mit $|x-b| < \delta',\ x \in D' \Rightarrow g(x)-g(b)| < \epsilon$.
f ist stetig in a, somit existiert zu diesem δ' ein $\delta > 0$ mit $|x-a| < \delta,\ x \in D\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \delta'$.
Also gilt: $|x-a| < \delta,\ x \in D\ \Rightarrow\ |g(f(x)) - g(f(a)| < \epsilon$. $\square$

2 Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

Erste Beobachtung:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, D Intervall.
Es gelte $f(x_0) > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt: $|x - x_0| < \delta,\ x \in D\ \Rightarrow f(x) > 0$.
Ist also die stetige Funktion f in x_0 positiv, so ist sie in einer ganzen „**Umgebung**“ um x_0 positiv.

Beweis
Man setze $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ und bestimme $\delta > 0$ so, dass gilt:
$|x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$.
Insbesondere folgt aus der Dreiecksungleichg. $|f(x_0)| - |f(x)| < \epsilon$; ergo $f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$.$\square$

14.1.2014

Der Zwischenwertsatz

(2.13) Satz
Sei $f : D \to R$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und seien $a < b$ zwei Punkte aus D, so dass $f(a)$ und $f(b)$ von 0 verschieden sind und verschiedene Vorzeichen haben.
Dann existiert eine Nullstelle ξ von f zwischen a und b: $a < \xi < b$ und $f(\xi) = 0$.

Beweis
Sei ohne Einschränkung $f(a) > 0,\ f(b) < 0$. Sei $M := \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}$.
M ist nicht leer (wegen $a \in M$) und nach oben beschränkt (durch b).
Es existiert also das Supremum $\xi := \sup M$.

Behauptung: $f(\xi) = 0$.
Wir beweisen dies indirekt:
(i) Angenommen, $f(\xi) > 0$. Offenbar ist $\xi < b$. Wegen der Stetigkeit von f existiert nach der Vorüberlegung ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0\ \forall x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$. Wir können $\delta < b - \xi$ wählen. Dann folgt $\xi + \frac{\delta}{2} \in M$. Dies führt zum Widerspruch, denn ξ ist obere Schranke von M.
(ii) Angenommen, $f(\xi) < 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) < 0\ \forall x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$. Auch dies führt zum Widerspruch, da ξ dann nicht die kleinste obere Schranke von M sein kann. $\square$

(2.14) Folgerung
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D ein Intervall, so ist auch der Wertevorrat $f(D)$ ein Intervall.

Beweis
Angenommen $y_1 < y_2 \in f(D)$. *Zu zeigen:* Gilt $y_0 \in (y_1, y_2)$, dann $y_0 \in f(D)$.
Seien $a, b \in D$ mit $f(a) = y_1$ und $f(b) = y_2$. Sei ohne Einschränkung $a < b$.
Betrachte die Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - y_0$. Dann ist $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$. Daraus folgt nach (2.13), dass ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$ existiert. Dann ist $f(\xi) = y_0$, also $y_0 \in f(D)$. $\square$

Monotone Funktionen

Man nennt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$
(i) **(streng) monoton wachsend**, wenn $\forall a, b \in D$ gilt: $a < b \;\Rightarrow\; f(a) \leq f(b)$ (bzw. $f(a) < f(b)$)
(ii) **(streng) monoton fallend**, wenn $\forall a, b \in D$ gilt: $a < b \;\Rightarrow\; f(a) \geq f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$)
(iii) **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Eine Funktion f ist genau dann streng monoton, wenn für jedes Tripel $a < b < c,\; a, b, c \in D$ die Werte $f(b) - f(a)$ und $f(c) - f(b)$ von Null verschieden sind und das gleiche Vorzeichen haben.

(2.15) Folgerung

Eine stetige Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall D ist genau dann inj., wenn sie streng monoton ist.

Beweis

„$\Leftarrow$" Wennn f streng monoton ist, so ist f injektiv, da keine $x < y \in D$ mit $f(x) = f(y)$ existieren.
„$\Rightarrow$" Sei f also injektiv. Wir schließen indirekt und nehmen dafür an, dass es ein Tripel $a < b < c$, $a, b, c \in D$ gebe, so dass $f(b) - f(a)$ und $f(c) - f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben.
Ohne Einschränkung gelten $f(b) < f(a) \;\Leftrightarrow\; f(b) - f(a) < 0$ und $f(b) < f(c) \;\Leftrightarrow\; f(c) - f(b) > 0$.
Wir wählen einen beliebigen Wert y_0 mit $f(b) < y_0 < f(a)$ und $f(b) < y_0 < f(c)$.
Nach dem Zwischenwertsatz existieren Zwischenstellen ξ, ξ' mit $a < \xi < b$ und $f(\xi) = y_0$ sowie $b < \xi' < c$ und $f(\xi') = y_0$. Dies stellt einen Widerspruch zur Injektivität von f dar. $\square$

(2.16) Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion auf dem Intervall D.
Ist der Wertevorrat $f(D)$ auch ein Intervall, so ist f stetig.

Beweis

Ohne Einschränkung nehmen wir an, f sei streng monoton wachsend.
Sei $x_0 \in D$. Wir nehmen zunächst an, dass x_0 kein Randpunkt von D ist. Dann ist wegen der strengen Monotonie auch $f(x_0)$ kein Randpunkt von $f(D)$. Also ist für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ $[f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon]$ eine Teilmenge von $f(D)$. Wir wollen nun die Stetigkeit von f zeigen, gesucht ist also $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$.
Sei $y_1 := f(x_0) - \epsilon \in f(D)$ und $y_2 := f(x_0) + \epsilon \in f(D)$; seien $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$.
Wegen der strengen Monotonie von f sind x_1, x_2 eindeutig. Definiere nun $\delta := \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$.
Aus $|x - x_0| < \delta \;\Leftrightarrow\; x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ folgt dann $x_1 < x < x_2$, also folgt aus der strengen Monotonie: $f(x_0) - \epsilon = y_1 = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = y_2 = f(x_0) + \epsilon$ also $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Ist x_0 ein Randpunkt von D, führt man die obige Argumentation einseitig. $\square$

Bemerkung:

Der Satz bleibt gültig, wenn man anstelle der strengen nur die einfache Monotonie voraussetzt.
Stetigkeit und Monotonie sind **lokale** Eigenschaften einer Funktion. Wir präzisieren dies:

(2.17) Definition

Sei $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ von a versteht man das Intervall $U_\epsilon(a) := (a - \epsilon, a + \epsilon)$ $= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\}$.
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}$, $D_0 \subset D$. Die Einschränkung von f auf D_0 ist die Funktion $f_0 : D_0 \to \mathbb{R},\; f_0(x) := f(x) \;\forall x \in D_0$.
Schreibweise: $f_{|D_0} := f_0$.

Die Eigenschaft der Stetigkeit ist im folgenden Sinne *lokal*:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \to \mathbb{R}$ Intervall und $a \in D$. Die Funktion f ist genau dann stetig in a, wenn es eine ϵ-Umgebung $U := U_\epsilon(a)$ von a gibt, so dass die Einschränkung von f auf $U \cap D$ stetig in a ist.

Beweis: Übungsaufgabe!

Also: Ob eine Funktion f stetig in a ist, hängt nur vom Verhalten von f in der Nähe von a ab.

Die Eigenschaft der Monotonie ist im folgenden Sinne ebenfalls *lokal*:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}$ Intervall. Die Funktion f ist genau dann (streng) monoton wachsend, wenn sie lokal (streng) monoton wachsend ist, wenn es also zu jedem Punkt $a \in D$ ein $U_\epsilon(a)$ gibt, so dass $f_{|U \cap D}$ (streng) monoton wachsend ist. Dies gilt analog für monoton fallende Funktionen.

17.1.2014

Beweis
Sei die Funktion f also lokal streng monoton wachsend.
Wir zeigen: f ist schlechthin monoton wachsend (auf ganz D).
Wieder indirekt: Angenommen, es gibt zwei Punkte a und b aus D mit $a < b$ aber $f(a) \geq f(b)$.
Sei $M := \{x \in [a, b] : f(a) < f(x)\}$. Diese Menge ist nicht leer, da f in einer δ-Umgebung von a streng monoton wachsend ist. Sie ist nach oben beschränkt (durch b). Also existiert $\xi := \sup M$.
Es gilt $a < \xi \leq b$. Wir nutzen nun aus, dass f auch in einer δ'-Umgebung von ξ monoton wachsend ist.
Folglich existiert ein $x \in U_{\delta'}(\xi)$ mit $x < \xi,\ f(x) < f(\xi)$.
Aber für dieses x ist auch $f(a) < f(x)$, da $x \in M$ ist, also ist auch $f(a) < f(\xi)$ und somit $\xi \in M$.
Außerdem ist $\xi < b$, da $b \notin M$ nach Voraussetzung gilt.
Wir nutzen nun nochmal aus, dass f in einer δ'-Umgebung von ξ monoton wachsend ist.
Es folgt $\xi + \frac{\delta'}{2} \in M$ sofern $\delta' > 0$ so klein gewählt, dass $\delta' < b - \xi$.
Da ξ aber bereits obere Schranke von M ist, ergibt sich hier ein Widerspruch. □

Mithilfe von (2.15) folgt nun:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall. Die Injektivität von f ist eine lok. Eigenschaft.

Die Umkehrfunktion

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$, eine injektive Funktion und $f(D)$ der Wertevorrat von f.
Zu jedem $b \in f(D)$ existiert dann genau ein eindeutig bestimmter Punkt $a \in D$ mit $f(a) = b$.
Ordnet man nun jedem $b \in f(D)$ dieses zugehörige a zu, erhält man eine neue Funktion $g : f(D) \to \mathbb{R}$.
Sie hat die Eigenschaft $f(a) = b \ \Leftrightarrow\ a = g(b)$. Man nennt g die **Umkehrfunktion** von f.
Offenbar ist g ebenfalls injektiv. Die Umkehrfunktion von g ist f.
Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertevorrat der Ausgangsfunktion.
Der Wertevorrat der Umkehrfunktion ist der Definitionsbereich der Ausgangsfunktion.
Bezeichnung: f^{-1}: Umkehrfunktion von f. *(kann nur für injektive Funktionen f gebildet werden)*
Achtung: Die Umkehrfunktion f^{-1} ist etwas völlig anderes als die reziproke Funktion $\frac{1}{f}$!

(2.16) zeigt nun, dass die Umkehrfkt. einer stetigen Funktion auf einem Intervall wieder stetig ist:
(2.18) Satz
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Funktion auf einem Intervall D.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.

Beweis
Die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion ist ebenfalls streng monoton.
Damit folgt die Behauptung aus (2.16), denn der Wertevorrat von f^{-1} ist das Intervall D. □

(2.19) Beispiel

Sei $n \in \mathbb{N}$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^n$.

Behauptung: Der Wertevorrat von f ist $f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$.

Beweis: Wir zeigen lediglich, dass für $y_0 > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $y_0 = x_0^n$ existiert. *(Ex. der n-ten Wurzel)*
Da die Funktionen $x \mapsto x^n$ stetig sind, $\left\{\begin{array}{l}\text{dies zeigt man bspw. mithilfe der Permanenzeigenschaften für Folgen,} \\ \text{siehe beispielsweise } x \mapsto x^3 \text{ zu Beginn des Kapitels}\end{array}\right.$
reicht es nach dem Zwischenwertsatz, Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a^n \leq y_0 \leq b^n$ zu konstruieren.
Deren Existenz ist klar: Man wähle beispielsweise $a = \frac{1}{n}$ und $b = k$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$. □

Die Funktion f ist offenbar streng monoton, wenn n ungerade ist.
Wir können daher für n ungerade die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden.
Bezeichnung: $f^{-1}(x) := \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ „n-te Wurzel von x“
Die definierende Eigenschaft dieser Funktion ist $(\sqrt[n]{x})^n = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bei *ungeraden* n erhalten wir also:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ ist stetig und streng monoton wachsend. Ihr Wertevorrat ist $\mathbb{R}$.
Ihre Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist daher auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, ebenfalls stetig und monoton wachsend und hat den Wertevorrat $\mathbb{R}$.

Bei *geraden* n kann man nicht ohne Weiteres die Umkehrfunktion bilden, denn die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ ist nicht injektiv! Es gilt schließlich $(-x)^n = x^n$.
Idee: Wir schränken den Definitionsbereich ein. Sei $f_0 := f_{|D},\ D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
f_0 ist streng monoton wachsend und hat den gleichen Wertevorrat wie f, nämlich D.
$f_0^{-1} : D \to \mathbb{R}$ Umkehrfunktion.
Bezeichnung: $f_0^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ für $x \geq 0$.
Bei *geraden* n erhalten wir also:
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ mit $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ist stetig und streng monoton wachsend.
Ihre Umkehrfunktion $g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.
Ihr Wertevorrat ist auch D. Nach unserer Definition ist der Ausdruck $\sqrt[n]{x}$ bei geraden n somit nur für $x \geq 0$ definiert und es gilt $\sqrt[n]{x} \geq 0$ für $x \geq 0$.

Die Funktion f mit $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ kann man aber auch auf eine ganz andere Art und Weise gewinnen.
Behauptung
Die Fkt. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist streng monoton wachsend, stetig und hat als Wertevorrat $\mathbb{R}_+$.
Beweis: Übungsblatt 12, Aufgabe 2!

Die Umkehrfunktion von exp ist der **natürliche Logarithmus**.
Sein Definitionsbereich ist der Wertevorrat von exp, also $\mathbb{R}_+$: $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
Wir erhalten folgendes Ergebnis:
Die Umkehrfunktion log von exp ist auf $\mathbb{R}_+$ definiert und hat als Wertevorrat $\mathbb{R}$. Der Logarithmus ist stetig, str. monoton wachsend und genügt der Funktionalgleichung $\log(xy) = \log x + \log y,\ x, y \in \mathbb{R}_+$, denn für $x = \exp u,\ y = \exp v,\ u, v \in \mathbb{R}$ gilt $\log(\exp u \cdot \exp v) = \log(\exp(u+v)) = u+v = \log x + \log y$.

21.1.2014

(2.20) Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$. Wir definieren $a^b := \exp(b \log a)$.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a = \exp(x \log a)$ heißt **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Bemerkung
Für die Fälle, für die a^b bereits definiert wurde, ändert sich nichts. Die Definitionen stimmen dann überein.

Beispiel
$x > 0,\ n \in \mathbb{N}.\qquad x^n := x^{(n-1)} \cdot x.$ *(war induktiv definiert,* $x^1 := x$*)*
$\underbrace{\exp(n \log x)}_{x^n} = \exp((n-1)\log x + \log x) = \underbrace{\exp((n-1)\log x)}_{x^{n-1}}\underbrace{\exp(\log x)}_{x}.$

Ferner ist $e^x = \exp(x \underbrace{\log e}_{\exp(1)=e \,\Leftrightarrow\, \log e = 1}) = \exp(x)$.

Rechenregeln:
(i) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ (sofern $a > 0$)
(ii) $a^c b^c = (ab)^c$ ($a > 0,\ b > 0$)
(iii) $(a^b)^c = a^{bc}$ (sofern $a > 0$)

Diese folgen unmittelbar aus der Definition und den beiden Formeln $\log(ab) = \log a + \log b$ $(a, b > 0)$ sowie $\log a^b = b \log a$, wie durch Anwendung von exp auf beiden Seiten bewiesen wird.

(2.21) Satz
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$.
Der Wertevorrat von f besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Beispielsweise existiert also ein Punkt $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in [a, b]$.
Aus dem Zwischenwertsatz hatten wir gefolgert:
$f : D \to \mathbb{R}$ stetig, D Intervall $\Rightarrow f(D)$ Intervall
Die Funktion nimmt also auch alle Werte zwischen Maximum und Minimum an!

Es gilt also: Der Wertevorrat einer auf einem abgeschlossenen Intervall definierten stetigen Funktion ist selbst ein abgeschlossenes Intervall.

Insbesondere ist eine solche Funktion also beschränkt, das heißt, es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq C\ \forall x \in [a, b]$. Man wähle beispielsweise $C := \max\{|\min\{f(x)\}|, |\max\{f(x)\}|\}$.

Beweis
Zunächst zeigen wir, dass f beschränkt ist. Dies beweisen wir indirekt.
Nehmen wir also an,f sei unbeschränkt. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$.
Da aber $[a, b]$ nach oben und unten beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ihr Grenzwert sei $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\nu_n}$. Da nichtstrikte Relationszeichen bei der Grenzwertbildung erhalten bleiben, folgt $a \leq x^* \leq b$. Da f stetig ist, hat man $f(x^*) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\nu_n})$ und diese Folge muss beschränkt sein, da jede konvergente Folge beschränkt ist. $\lightning$

Nun zeigen wir: f besitzt Maximum und Minimum.
Wir führen den Beweis nur für das Maximum; den Fall für das Minimum beweist man analog.

Sei $\beta := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Wir müssen zeigen: $\beta \in f([a, b])$.
Wäre dies nicht der Fall, so könnte man die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{|f(x)-\beta|}$ betrachten und diese wäre stetig auf dem Intervall $[a, b]$. Nach dem ersten Teil wäre dann g in $[a, b]$ beschränkt.
Dies würde einen Widerspruch zur Definition des Supremums bedeuten. $\square$

3 Folgen und Reihen von Funktionen

(2.22) Definition

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ D \subset \mathbb{R}$ heißt **punktweise konvergent** gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für jedes $x \in D$.
Schreibweise: $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ oder $f_n \to f$ für $n \to \infty$.

Naiv könnte man vermuten, dass die Grenzfunktion stetig ist, wenn alle Funktionen f_n stetig sind. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall!

Gegenbeispiel: $D = [0,1],\ f_n(x) = x^n$. Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \le x < 1 \end{cases}$.
Die Grenzfunktion ist also unstetig an der Stelle $x = 1$!

Dass die Stetigkeit von Funktionen bei Grenzübergängen zerstört werden kann, ist sehr unschön. Es gibt jedoch einen stärkeren Konvergenzbegriff – die sogenannte **gleichmäßige Konvergenz** – der diese unschöne Eigenschaft nicht hat.

(2.23) Definition

Die **Supremumsnorm** einer beschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \neq \varnothing$, ist definiert als $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in D\}$.
Da es später mehrere verschiedene Normen gibt, schreibt man auch $\|f\|_{\text{sup}}$, um klarzustellen, dass es sich um die Supremumsnorm handelt.
Für eine beschränkte Funktion gilt also: $|f(x)| \le C\ \forall x \in D \ \Leftrightarrow\ \|f\| \le C$.
Insbesondere gilt $f(x)| \le \|f\|\ \forall x \in D$.
Im Allgemeinen braucht $\|f\|$ nicht im Wertevorrat $f(D)$ von f zu liegen, nur unter speziellen Voraussetzungen ist dies der Fall, beispielsweise für stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall.

(2.24) Bemerkung

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkt; $C \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(i) $\|f\| \ge 0$ und $\|f\| = 0$ nur, wenn $f(x) = 0\ \forall x \in D$.
(ii) $\|Cf\| = |C| \cdot \|f\|$
(iii) $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$
(iv) $\|f \cdot g\| \le \|f\| \cdot \|g\|$

Beweis
(i), (ii), (iv) Übungsaufgabe!
(iii) Nach der Dreiecksungleichung ist $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|$, also $|f(x) + g(x)| \le \|f\| + \|g\|\ \forall x \in D$; somit auch $\underbrace{\sup\{|f(x) + g(x)| : x \in D\}}_{=\|f+g\|} \le \|f\| + \|g\|$
(denn das Supremum ist kleinste obere Schranke und $\|f\| + \|g\|$ ist obere Schranke) □

(2.25) Definition

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(i) Die Funktionen $f - f_n$ sind beschränkt.
(ii) Die Folge $(\|f - f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
(Es reicht sogar, (i) für alle bis auf endlich viele Ausnahmen zu fordern – tun wir hier deswegen nicht, weil $\|.\|_{\text{sup}}$ bislang nur für beschränkte Funktionen definiert war.)

Anders ausgedrückt:
Es existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f\| < \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(2.26) Bemerkung

Wenn eine Folge von Funktionen gleichmäßig gegen f konvergiert, so konvergiert sie auch punktweise.
Beweis: Folgt unmittelbar aus $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \ \forall x$ im Definitionsbereich von f_n, f □

(2.27) Satz

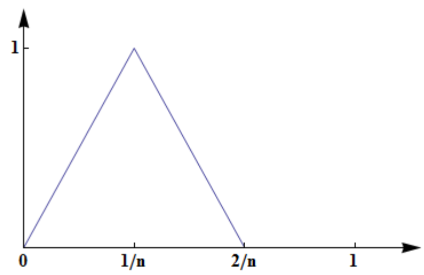
Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, die im Punkt $x_0 \in D$ stetig seien, D Intervall. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig in x_0.

Beweis
Sei $\epsilon > 0$. Hierzu wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall n \geq N$.
Da f_N stetig in x_0 ist, existiert $\delta > 0$, so dass $|x - x_0| < \delta, \ x \in D \ \Rightarrow \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.
Es folgt:
$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_N\| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f_N - f| < \epsilon. \end{aligned}$$
□

24.1.2014

(2.28) Beispiel

Sei $D = [0, 1]$.
$$f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{für } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$
f_n ist stetig und nimmt das Maximum im Punkt $\frac{1}{n}$ an.
Es gilt $\|f_n\| = |f_n(\frac{1}{n})| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.



Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Beweis
(i) $x = 0$: trivial, da $f_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) Sei $0 < x \leq 1$. Wählt man $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N \geq \frac{2}{x} \ \Leftrightarrow \ x \geq \frac{2}{N}$ gilt, so folgt $f_n(x) = 0 \ \forall n \geq N$.
Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Die Nullfunktion ist natürlich stetig!
Aber dennoch konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion: $\|f_n\| = 1 \not\to 0$. Die gleichmäßige Konvergenz steht auch im Zsm.hang mit der Frage, wann man Grenzwerte vertauschen darf.

Beispiel

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ für $0 \leq x < 1$, also $\lim\limits_{x\to1}(\lim\limits_{n\to\infty} x^n) = 0$; andererseits $\lim\limits_{x\to1} x^n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to1} x^n) = 1$.
Man darf also zwei Grenzübergänge im Allgemeinen nicht vertauschen!

Dieses Phänomen tritt jedoch bei gleichmäßiger Konvergenz nicht auf:
(2.29) Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in D$. Sei ferner $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, so dass $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$ existiert.
Dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ und aus Satz (2.27) folgt: $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to a} f_n(x))$.

(2.30) Definition

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen heißt punktweise/gleichmäßig konvergent, wenn dies für die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ zutrifft.
Man beachte: Sind alle f_k stetig, so gilt dies auch für die Partialsummen $F_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Für die gleichmäßige Konvergenz gibt es hier ein besonders einfaches Kriterium:
(2.31) Satz
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ eine Folge von beschränkten Funktionen.
Ist die Reihe der Normen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ der Funktionen gleichmäßig.

Beweis
Sei $T_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \|f_k\|$. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und ist somit eine Cauchyfolge.
Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|T_n - T_m| < \epsilon\ \forall n, m \geq N$ gilt. Sei o.B.d.A. $m > n \geq N$.
Dann gilt $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \|f_n\| < \epsilon\ \forall n, m \geq N \overset{\text{D.U.}}{\Rightarrow} \|\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_n\|_{\sup} < \epsilon \ \Leftrightarrow\ \|F_m - F_n\|_{\sup} < \epsilon$, wobei $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n$.
Insbesondere gilt $|F_m(x) - F_n(x)| < \epsilon \forall x \in D \forall m > n \geq N = N(\epsilon)$. Somit existiert $\lim\limits_{m\to\infty} F_m(x) =: F(x)$, da $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und es gilt $\lim\limits_{m\to\infty} |F_m(x) - F_n(x)| = |F(x) - F_n(x)| \leq \epsilon \forall n \geq N \forall x \in D$.
Übungsaufgabe: Man modifiziere den Beweis im Anschluss an Satz (1.61) entsprechend.

(2.32) Folgerung

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, konvergiert gleichmäßig, wenn es eine von $x \in D$ unabhängige Majorante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ gibt, das heißt, $|f_n(x)| \leq a_n\ \forall x \in D\ \forall n \in \mathbb{N}$. Natürlich impliziert die Existenz einer solchen Majorante für jedes $x \in D$ auch die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Dieses Majorantenkriterium garantiert also die absolute und die gleichmäßige Konvergenz der Reihe.

(2.33) Bemerkung
Man kann dieses Kriterium auch für summierbare Scharen formulieren. . .

4 Potenzreihen

Es sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Wie verhält sich die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe (absolut) konvergent?
(ii) In welchem Bereich $D \in \mathbb{R}$ ist sie sogar gleichmäßig konvergent?

Sei zunächst $x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \neq 0$ ein Punkt, für den die Folge $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist:
$|a_n x_0^n| \leq C\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ C$ aus $\mathbb{R}$ geeignet.
Unter dieser Voraussetzung zeigen wir die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < |x_0|$.

Sei dazu $r := \frac{|x|}{|x_0|} < 1$. Dann: $|a_n x^n| = r^n |\underbrace{a_n x_0^n}_{\leq C}| \leq C r^n$. Somit ist $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C r^n}_{\textit{geometrische Reihe}}$ eine konvergente Majorante.

Aus der Beschränktheit von $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergeben sich also Konsequenzen für die Konvergenz der Pot.reihe.

Daher definieren wir B als Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Zu jedem $x \in B$ existiert also eine von x abhängige Konstante $C_x \in \mathbb{R}$ mit $|a_n x^n| \leq C_x \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Aus obiger Überlegung folgt: $x \in B \Rightarrow [-|x|, |x|] \subset B$. B ist also ein um Null symmetrisches Intervall:
$B = (-r, r)$ $(r > 0)$, $\quad B = [-r, r]$, $r \geq 0$ $\quad$ oder $\quad B = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.
In den ersten beiden Fällen gilt dabei: $r = \sup\{x \in \mathbb{R} : (a_n x^n) \text{ ist beschränkt}\}$.

Bezeichnung:
Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge reeller Zahlen.
Dann sei $\sup M = \begin{cases} \sup M & \text{falls } M \text{ nach oben beschränkt ist;} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$
Außerdem vereinbaren wir $x < \infty \ \forall x \in \mathbb{R}$. Mit dieser Notation gilt oben: $r = \sup B$.
Man nennt r den **Konvergenzradius** der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(2.34) Satz
Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r.
Dann konvergiert die Reihe absolut für $|x| < r$, sie konvergiert nicht für $|x| > r$ (falls $r < \infty$).
Ist $\delta \in [0, r)$ beliebig, so konvergiert die Reihe in dem Intervall $[-\delta, \delta]$ gleichmäßig.

Beweis
(i) Sei $|x| > r$. Dann ist die Folge $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.
Konvergiert aber die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, so ist $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und somit beschränkt. $\lightning$
(ii) Sei $0 \leq \delta \leq r$ gegeben. Wir zeigen die absolute und gleichmäßige Konvergenz in $[-\delta, \delta]$.
Dies impliziert absolute Konvergenz $\forall x$ mit $|x| < r$, wenn δ hinreichend nahe an r gewählt wird.
Sei $x_0 := \frac{\delta + r}{2}$. Dann gilt: $\delta \leq x_0 < r$.
Nach Voraussetzung ist die Folge $|a_n x_0^n|$ beschränkt; es gilt $|a_n x_0^n| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Es folgt $|x| \leq \delta \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| \delta^n \leq C \cdot (\frac{\delta}{x_0})^n$, $\frac{\delta}{x_0} < 1$. Somit existiert eine von $x \in [-\delta, \delta]$ unabhängige Majorante, womit die absolute und gleichmäßige Konvergenz folgt! $\square$

28.1.2014

(2.35) Folgerung
Eine Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion dar.

Beweis
Die Reihe konvergiert in einer geeignet gewählten ϵ-Umgebung eines Punktes x mit $|x| < r$ gleichmäßig.
Der glm. Limes stetiger Fkt.en ist stetig, und die Partialsummen S_n mit $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig. $\square$

(2.36) Bemerkung
Über die Randpunkte des Konvergenzintervalls wird in Satz (2.34) nichts ausgesagt.
Es gibt auch keine allgemeingültige Aussage.

Beispiele
(i) Betrachten wir die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (von der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = 1 \ \forall n$).
Wir wissen (aus Kapitel 1), dass der Konvergenzradius 1 ist.
Die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in den Endpunkten (-1) und 1 noch beschränkt, sie ist aber keine Nullfolge.
$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert weder für $x = -1$ noch für $x = 1$.

(ii) Betrachten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ $(a_0 = 0)$.

Wir werden sehen: Der Konvergenzradius dieser Reihe ist ebenfalls 1, und für $|x| < 1$ gilt: $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Die Folge der allgemeinen Reihenglieder $(\frac{1}{n}x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist sowohl für $x = 1$ als auch für $x = -1$ eine Nullfolge.

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe für $x = -1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ (Leibnizsche Reihe)
Sie konvergiert nicht für $x = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonische Reihe)

Da auch keine gleichmäßige Konvergenz im Bereich $[-1, -1+\epsilon]$ ($\epsilon > 0$ klein genug) vorliegt, ist auch nicht klar, dass $-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ gilt!
(Wir wissen nur, dass der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.)
Das folgt erst aus dem abelschen Grenzwertsatz, den wir in der Analysis II besprechen werden.

(2.37) Hilfssatz

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat dann und nur dann einen positiven (d.h. von Null verschiedenen) Konvergenzradius, wenn die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Beweis
(i) Wenn der Konvergenzradius positiv ist, dann existiert eine Zahl $x_0 \neq 0$, so dass die Folge $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, das heißt, $|a_n x_0^n| \leq C \; \forall n \in \mathbb{N}$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{C}}{|x_0|}$. Die Folge $(\sqrt[n]{C})_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $C \geq 1$ konvergent gegen 1 *(s. Kapitel 1)* und damit beschränkt.
(ii) Sei die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also $\sqrt[n]{|a_n|} \leq C$, $C \in \mathbb{R}$ geeignet. Genau dann gilt auch $|a_n| C^{-n} \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(a_n C^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es folgt: $\underbrace{r}_{\text{Konvergenzradius}} > \frac{1}{C} > 0$. □

Kann man den Konvergenzradius aus der Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ ableiten? Dazu eine Vorbereitung:

(2.38) Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, wenn es eine gegen a konvergente Teilfolge von (a_n) gibt.

Bemerkung

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert mindestens ein Häufungspunkt, denn jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Die Menge M aller Häufungspunkte ist wie die Folge selbst beschränkt, somit existieren $\sup M$ und $\inf M$.
Man kann zeigen *(ÜA)*, dass $\sup M$ selbst wieder ein Häufungspunkt ist, also gilt $\sup M = \max M$.

Bezeichnung

$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup M$ (limes superior) $\liminf_{n\to\infty} a_n := \inf M$ (limes inferior)

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so stimmen limes superior und limes inferior mit dem Grenzwert der Folge überein, da jede Teilfolge dann gegen genau diesen Grenzwert konvergiert! *(s. Kapitel 1)*

Für den folgenden Satz definieren wir noch für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer reeller Zahlen:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} a_n & \text{falls } (a_n) \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem definieren wir: $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.

Dann gilt:

<u>(2.39) Satz</u>

Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ergibt sich zu $r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ohne Beweis – in der Praxis kann man den Konvergenzradius wie definiert in Satz (2.34) bestimmen.

<u>Beispiel</u>

Betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$. Die Folge $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn $|x| < 1$, *(ÜA)* also ist $r = 1$. Übrigens gilt auch $1 = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

3 (Differential- und) Integralrechnung

1 Integralrechnung

Ausgangspunkt: Frage nach der Fläche zwischen dem Graphen einer geg. Funktion und der x-Achse. Ist also $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ gegeben, so soll $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ein Maß für die Punktmenge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ sein. Dabei sollen gewisse Eigenschaften erfüllt sein:

(i) Ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant, d.h. $f(x) = C\ \forall a \leq x \leq b$, soll gelten: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\cdot c$.

(ii) Etwas allgemeiner als die konstanten Funktionen sind die Treppenfunktionen.

(3.1) Definition

Eine Fkt. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es „Stützstellen" $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt, so dass f in den offenen Intervallen $(a_\nu, a_{\nu+1}),\ 0 \leq \nu \leq n$ konstant ist.
Achtung: An den Stützstellen selbst wird nichts gefordert – die Funktion kann dort beliebige Werte annehmen. Sie sind die einzigen möglichen Unstetigkeitsstellen. Allerdings ist auch zugelassen, dass überflüssige Stützstellen auftreten, das heißt, die Funktion kann beispielsweise in einem ganzen Intervall $(a_\nu, a_{\nu+2})$ konstant sein. $a_{\nu+1}$ als Stützstelle wäre dann überflüssig.

(3.2) Bemerkung

Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion ist, dann gilt dies auch für $C \cdot f$ (für jedes $C \in \mathbb{R}$) und es gilt auch für die Funktion $|f|$. Die Stützstellen einer Treppenfunktion definieren eine sogenannte **Unterteilung** oder **Zerlegung** $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ des Intervalls $[a,b]$.
Eine weitere Unterteilung $a = a'_0 < a'_1 < \cdots < a'_{n'} = b$ heißt **Verfeinerung** der ersten, wenn $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n'}\}$. Offenbar ex. zu zwei Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, $a = a'_0 < a'_1 < \cdots < a'_{n'} = b$ stets eine gemeinsame Verfeinerung $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \cdots < \tilde{a}_{\tilde{n}} = b$, d.h. $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{\tilde{n}}\}$ und $\{a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n'}\} \subset \{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{\tilde{n}}\}$.

(3.3) Bemerkung

Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen, so sind die Fkt. $f + g$ und $f \cdot g$ ebenfalls Treppenfkt.

Nun: Integral für Treppenfunktionen
Eine Stützstelle in (a,b) heißt **wesentlich**, wenn sie tatsächlich Unstetigkeitsstelle von f ist.

(3.4) Definition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit den wesentlichen Stützstellen $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Dann definiert man $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x := \sum\limits_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1})C_\nu$, wobei $f(x) = C_\nu\ \forall x \in (a_{\nu-1}, a_\nu)$.

(3.5) Bemerkung

Ist $a = a'_0 < a'_1 < \cdots < a'_{n'} = b$ eine weitere Unterteilung von $[a,b]$, so dass f in den Intervallen $(a'_{\nu-1}, a'_\nu)$ konstant ist, so gilt: $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1})C_\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{n'} (a'_\nu - a'_{\nu-1})C'_\nu$ $(*)$

Beweis

Offenbar ist $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n'}\}$, da $a_1, \ldots, a_{n-1}$ wesentliche Stützstellen sind.
Obige Identität zeigt man nun mittels vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang ($n = 1$): Angenommen, die Funktion f sei konstant in (a, b): $f(x) = C \ \forall x \in (a, b)$.

$$(*) \text{ lautet dann: } C(b-a) = C \sum_{\nu=1}^{n'} (a'_\nu - a'_{\nu-1}) \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Übungsaufgabe.

Nun Idee: Wir definieren das Integral für eine beliebige Fkt. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch einen Grenzprozess. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen f konvergiert: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \ \forall x \in [a, b]$.

Können wir definieren.: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$?

Beispiel

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0; \\ n & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n}; \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Wesentliche Stützstellen: $0 < \frac{1}{n} < 1$

In den Stützstellen selbst ist die Funktion 0. Nun gilt:

$\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n(\frac{1}{n} - 0) + 0(1 - \frac{1}{n}) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$.

Aber: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall x \in [0, 1] \ \Rightarrow \ \int\limits_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\mathrm{d}x = 0$

$\to$ Schwierigkeiten beim Vertauschen von Grenzübergängen!

Könnte man eine stärkere Form der Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f fordern, so dass dieses Problem nicht auftritt? Gleichmäßige Konvergenz?

(3.6) Definition

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, wenn es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Wir wollen $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ definieren.

Zu zeigen: (i) Die Folge $\left(\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(ii) Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

Es darf auf die spezielle Wahl der approximierenden Folge der Treppenfunktionen nicht ankommen!

(3.7) Hilfssatz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Treppenfunktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Dann ist die Folge $\left(\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Beweis
Zunächst für Treppenfunktionen g und h gilt: $\int_a^b (g \pm h)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$.
(Zum Beweis hiervon wähle man eine gemeinsame Verfeinerung der Stützstellen und verwende (3.5).)
Außerdem ist $\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \|g(x)\|(b-a)$, denn:

$g(x) = C_\nu$ auf $(a_{\nu-1}, a_\nu) a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b,\ \nu = 1, \dots, n$.

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{\nu=1}^n C_\nu(a_\nu - a_{\nu-1})\right| \leq \sum_{\nu=1}^n |C_\nu(a_\nu - a_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^n |C_\nu|\,(a_\nu - a_{\nu-1})$$
$$\leq \sum_{\nu=1}^n (\max|C_\nu|)(a_\nu - a_{\nu-1}) \leq \max|C_\nu| \sum_{\nu=1}^n \underbrace{(a_\nu - a_{\nu-1})}_{(b-a)} \leq \|g\|(b-a)$$

Wir zeigen nun die Konv. von $\left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Cauchy-Kriterium. Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_m(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f_m(x))\mathrm{d}x\right| \leq \|f_n - f_m\|(b-a) \leq (\|f_n - f\| + \|f - f_m\|)(b-a)\ (\Delta).$$

Ist nun $\epsilon > 0$ und $N = N(\epsilon)$ so, dass $\|f_n - f\| < \epsilon\ \forall m, n \geq N(\epsilon)$, so ist $(\Delta) \leq 2(b-a)\epsilon$.
Die Folge $\left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und somit konvergent.

(3.8) Hilfssatz
Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei glm. konvergente Folgen von Treppenfunktionen $f_n, g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die gegen die gemeinsame Grenzfunktion f konvergieren. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$.

Beweis
Die Folge $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots$, also $(h_n)_{n\in\mathbb{N}},\ h_{2n} := g_n,\ h_{2n-1} := f_n,\ n \in \mathbb{N}$, konv. ebenfalls glm. gegen f.
Nach Hilfssatz (3.7) konv. dann die Folge der Integrale $\left(\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.
Da dann auch alle Teilfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren, gilt das sowohl für $\left(\int_a^b h_{2n}(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch für $\left(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ also $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$.□

(3.9) Definition
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann definieren wir: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$,
wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irgendeine Folge von Treppenfunktionen ist, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Nun: Untersuchung der Permanenzeigenschaften des Regelintegrals.

(3.10) Bemerkung
Eine Regelfunktion ist beschränkt.

Beweis
Offenbar ist jede Treppenfunktion beschränkt. Nun gilt aber
$\|f - f_n\| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon\ \forall x \Rightarrow |f(x)| < \epsilon + |f_n(x)| < \epsilon + \|f_n\|\ \forall x$ also ist auch f beschränkt.

(3.11) Bemerkung
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen und $C \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch $f+g$, $f\cdot g$, Cf und $|f|$ Regelfunktionen und es gilt:
$\int\limits_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_a^b (Cf)(x)\mathrm{d}x = C\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Beweis
Blatt 14, Aufgabe 4: $f+g$, $f\cdot g$, $|f|$ (Cf klar!)
Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Treppenfunktionen mit $\|g_n-g\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ und $\|f_n-f\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.
Dann gilt:

$$\int\limits_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (f_n+g_n)(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g_n(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$\overset{(1.44)}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad\square$$

(3.12) Hilfssatz

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Regelfunktion und es sei $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. Dann ist auch $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$.

Beweis
Wir wählen eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.
Die Folgen $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sind ebenfalls Treppenfunktionen und konvergieren gleichmäßig gegen $|f|=f$.
(denn: $\big||f_n(x)|-|f(x)|\big|\leq|f_n(x)-f(x)|$ also: $\big\||f_n|-|f|\big\|\leq\|f_n-f\|$)
Für Treppenfunktionen ist die Aussage des Hilfssatzes trivial.
$\int\limits_a^b |f_n(x)|\mathrm{d}x\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ also auch $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{(1.56)}{\geq} 0$. $\square$

4.2.2014

(3.13) Hilfssatz

Seien $a<b<c$ und sei $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann eine Regelfunktion, wenn die Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Regelfunktionen sind.
In diesem Fall ist $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Beweis
Übungsaufgabe! (Die letzte Formel ist klar für Treppenfunktionen und gilt dann auch im Grenzwert nach den Permanenzeigenschaften für Folgen.)

(3.14) Definition

Für eine Regelfunktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definieren wir $\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0$.

Dann kann man die Formel in (3.13) schreiben als $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(3.15) Bemerkung

Man kann eine Regelfunktion in endlich vielen Punkten beliebig abändern, ohne dass ihre Eigenschaft, eine Regelfunktion zu sein, verloren geht und daher ohne dass sich der Wert des Integrals ändert!

Beweis
Klar für Treppenfunktionen, daher folgt es auch für Regelfunktionen.

(3.16) Satz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a,b]$, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert.
Dann ist auch f eine Regelfunktion und es gilt $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

Also: Das Regelintegral ist stabil gegenüber gleichmäßiger Approximation.
Beachte: Obige Aussage ist gerade die Definition, falls die Funktionen f_n Treppenfunktionen sind.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Achtung: Der Grenzwert}\\ \text{muss gleichmäßig sein!}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

Vor dem Beweis der Bemerkung:
Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion,
wenn es zu jedem $\epsilon>0$ eine Treppenfunktion $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ gibt, so dass $\|f-g\|<\epsilon$.

Beweis

(i) Wir zeigen, dass f eine Regelfunktion ist. Sei $\epsilon>0$.
Wegen $\|f-f_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ existiert ein $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ mit $\|f_n-f\|<\epsilon\ \forall n\geq N$.
Wir wählen nun eine Treppenfunktion g mit $\|f_n-g\|<\epsilon$ (das geht, da f_n eine Regelfunktion ist.)
$\Rightarrow\ \|f-g\| = \|f-f_N+f_N-g\| \leq \|f-f_N\|+\|f_N-g\| < 2\epsilon$
f wird also durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximiert.

(ii) Es gilt für $n\geq N(\epsilon)$:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x)-f_n(x))\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{\leq\|f-f_n\|}\mathrm{d}x < (b-a)\epsilon$$

$\epsilon>0$ war beliebig $\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ □

Welche Funktionen sind Regelfunktionen?

(3.17) Satz

Jede monotone Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

Bemerkung

Hieraus folgt, dass eine Funktion bereits dann eine Regelfunktion ist, wenn es eine Unterteilung $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$ gibt, so dass f nur in den offenen Intervallen $(a_{\nu-1}-a\nu)$, $1\leq\nu\leq n$ monoton ist ($\Rightarrow$ Hilfssatz (3.13))

Beweis

Sei f monoton wachsend. (fallend analog!) Dann gilt: $\overbrace{f([a,b])}^{\text{Wertevorrat von } f}\subset[f(a),f(b)]$
Wir zerlegen dieses Intervall in n gleich große Teile.
$f(a)=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_n=f(b)$ mit $c_\nu=f(a)+\frac{\nu}{n}(f(b)-f(a))$ für $0\leq\nu\leq n$.
$B_\nu:=[c_{\nu-1},c_\nu],\ 1\leq\nu\leq n;\qquad A_\nu:=f^{-1}(B_\nu)=\{x\in[a,b]:c_{\nu-1}\leq f(x)\leq c_\nu\}$.
f monoton wachsend $\Rightarrow A_\nu$ (eventuell leeres) Intervall.
Seien $A_{\nu_1},\ldots,A_{\nu_k}$ $(1\leq\nu_1<\cdots<\nu_k\leq n)$ die echten Intervalle, d.h. solche, die mehr als einen Punkt enthalten.
Sei nun $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_k=b$ eine Unterteilung, so dass $(a_{j-1},a_j)\subset A_{\nu_j}\subset[a_{j-1},a_j]$.
Eine solche Unterteilung existiert, da die Intervalle A_{ν_j} aneinandergrenzen. Ob ein Randpunkt zu A_{ν_j} gehört oder nicht, kann man allerdings nicht sagen. Das ist abhängig von der speziellen Funktion f, spielt hier aber keine Rolle. Wir wählen nun noch irgendeinen Punkt $x_j\in(a_{j-1},a_j)$ (bspw. den Mittelpunkt) und definieren $f_n(x):=\begin{cases} f(x_j) & \text{für } x\in(a_{j-1},a_j)\quad j=1,\ldots,k;\\ f(a_j) & \text{für } x=a_j,\quad j=0,\ldots,k.\end{cases}$

Die Funktionen f_n sind Treppenfunktionen. Wir schätzen den Betrag $|f_n(x) - f(x)|$ ab.
Es gilt $f(A_{\nu_j}) \subset \underbrace{B_{\nu_j}}_{\text{Intervall der Länge } \frac{f(b)-f(a)}{n}}$ und wegen $(a_{j-1}, a_j) \subset A_{\nu_j}$ ist auch $f_n((a_{j-1}, a_j)) \subset B_{\nu_j}$

$\Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{f(b)-f(a)}{n}\ \forall x \in [a,b]\ \Rightarrow\ \|f_n - f\| \leq \frac{f(b)-f(a)}{n}$.
Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. □

Nun wollen wir beweisen: Jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion.
Vorbereitung hierfür: *Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit.*

$f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall, f stetig.
Zu jedem $a \in D$ und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert per Definition ein $\delta > 0$, so dass:
$x \in D,\ |x - a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon$. δ darf sowohl von ϵ als auch von a abhängen.
Frage: Besteht die Abhängigk. von a tatsächlich oder kann man $\delta > 0$ so wählen, dass es nur noch von ϵ abhängt?
Antwort: Dies ist im Allgemeinen nicht möglich; Bsp.: $f(0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$.

Aber:
(3.18) Satz *(Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit)*
Sei $D = [a,b],\ a < b$, ein abgeschlossenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf D.
Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass gilt: $|x - y| < \delta,\ x, y \in D\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Eine stetige Funktion ist auf einem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig.

Beweis:
Angenommen, es existiert ein $\epsilon_0 > 0$, so dass obige Aussage falsch ist.
Das heißt, zu jedem $\delta > 0$ findet man ein Paar $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$.
Wir nutzen dies speziell für $\delta = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ und finden damit Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$.
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_ν}) von (x_n). Erneute Anwendung von Bolzano-Weierstraß ergibt die Existenz einer konvergenten Teilfolge (y_{n_ν}) von (y_n).
Wir finden also zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $|a_n - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ aber $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$.
D abgeschlossen $\Rightarrow a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in D$!
f stetig $\Rightarrow 0 = |f(a) - f(a)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$. ↯

7.2.2014

(3.19) Satz
Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ a < b$ ist eine Regelfunktion.

Beweis
Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in n gleich große Teile:
$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ mit $a_\nu = a + \frac{\nu}{n}(b-a),\ 0 \leq \nu \leq n$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(a_{\nu-1}) & \text{für } x \in [a_{\nu-1}, a_\nu),\ \nu = 1, \dots, n; \\ f(a_n) & \text{für } x = a_n = b \end{cases}$$

Wir zeigen: $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Dazu benutzen wir den Satz von der gleichmäßiger Stetigkeit:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass $\forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dazu bestimmen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{N} < \delta = \delta(\epsilon)$.
Für $n \geq N$ gilt dann:
$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(a_{\nu-1})|$ für $x \in [a_{\nu-1}, \ldots, a_\nu] < \epsilon$, denn in diesem Intervall ist $|x - a_{\nu-1}| < \delta$.
Also $\|f - f_n\| \leq \epsilon$ □

Beispiel: $\|f_n - f\| \leq \frac{1}{n}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\ \forall x \in [a, b]$

Wie sieht es aus mit Funktionen, die keine Regelfunktionen sind?
(3.20) Satz *(Kriterium für Regelfunktionen)*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ a < b$, eine Regelfunktion und sei $x_0 \in [a, b]$ ein beliebiger Punkt. Dann existieren die **einseitigen Grenzwerte** $\underbrace{\lim_{x \to x_0^+}}_{\text{rechtsseitiger Limes}} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ (falls $x \neq b$) und $\underbrace{\lim_{x \to x_0^-}}_{\text{linksseitiger Limes}} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ (falls $x \neq a$).
(Schränkt man f auf $[a, x_0]$ ein und setzt $f_1 = f|_{[a,x_0]}$, so gilt definitionsgemäß $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$.)

$x_n > x_0,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beweis
Es gilt für Treppenfunktionen und folgt für den gleichmäßigen Limes aus (2.29). □

Bemerkung
Man kann sogar zeigen, dass dieses Kriterium sogar hinreichend dafür ist, dass f eine Regelfunktion ist.

(3.21) Beispiel

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational;} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

$\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R} \Rightarrow$ einseitige Limites existieren nicht. Damit ist f keine Regelfunktion. □

Berechnung einiger Integrale
$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < a < b!$
Wir wollen f mithilfe einer Approximation durch Treppenfunktionen berechnen: Wir wählen hierfür eine Unterteilung:
$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, so dass die Quotienten $\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}},\ 1 \leq \nu \leq n$ konstant sind.
Dazu sei $q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$ und man setzt $a_\nu := a \cdot q^\nu$ für $0 \leq \nu \leq n$, also
$a_0 = a,\ a_1 = aq,\ a_2 = aq^2,\ \ldots,\ a_n = aq^n = a\frac{b}{a} = b.$

Definiere nun $f_n : [a, b] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} f(a_{\nu-1}) & \text{für } x \in [a_{\nu-1}, a_\nu),\ 1 \leq \nu \leq n; \\ f(a_n) & \text{für } x = a_n. \end{cases}$

Dann gilt für $x \in [a_{\nu-1}, a_\nu)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - f(a_{\nu-1})| \overset{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{von } f}}{\leq} |f(a_\nu) - f(a_{\nu-1})| = |f(aq^\nu) - f(aq^{\nu-1})| = |a^\alpha q^{\nu\alpha} - a^\alpha q^{(\nu-1)\alpha}| \\ &= a^\alpha q^{(\nu-1)\alpha} |q^\alpha - 1| \\ &\leq a^\alpha \cdot \max((\tfrac{b}{a})^n, 1) \cdot |(\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}})^\alpha - 1| \\ &= a^\alpha \cdot \text{Konstante} \cdot \underbrace{|(\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}})^\alpha - 1|}_{\text{unabhängig von } x \text{ und } y} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ (\text{da } \sqrt[n]{\tfrac{b}{a}} \to 1 \text{ nach (1.42)}) \end{aligned}$$

$$\boxed{1 < \underbrace{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}_{q} < (\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}})^2 < \cdots < (\sqrt[n]{\tfrac{b}{a}})^n = \tfrac{b}{a}}$$

Also machen wir folgendes: $\quad \|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Also: $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1})f(a_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1})a_{\nu-1}^{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} a(q^\nu - q^{\nu-1})a^\alpha q^{(\nu-1)\alpha}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a^{\alpha+1}(q-1)q^{(\nu-1)(\alpha+1)} = a^{\alpha+1}(q-1)\sum_{\nu=1}^{n} q^{(\nu-1)(\alpha+1)} \overset{\substack{\text{man fordere}\\ \alpha\neq-1}}{\stackrel{\downarrow}{=}} a^{\alpha+1}(q-1)\underbrace{\frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1}}_{\text{geometrische Summenformel}}$$

$$\overset{q^n=\frac{b}{a}}{\stackrel{\downarrow}{=}} a^{\alpha+1}\tfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}\left((\tfrac{b}{a})^{\alpha+1}-1\right) = (b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})\tfrac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}.$$

Ist sogar $\alpha \in \mathbb{N}$, so gilt $\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} = \frac{1}{1+q+q^2+\cdots+q^\alpha}$.

<u>Nun:</u> Grenzübergang $n \to \infty$:

$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ((1.42)!) $\Rightarrow \int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$.

Wie sieht es mit $\int_a^b \exp(x)\mathrm{d}x$ aus?

Wir berechnen das Integral hier mit einer anderen Methode. hierbei wollen wir benutzen, dass das Regelintegral stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz ist. ((3.16))
Dafür formulieren wir den Satz zunächst für Reihen um.
Sei also $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine Reihe von Regelfunktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$, die gleichmäßig gegen F konvergiere, also $\|F_n - F\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mit $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Nach Satz (3.16) gilt dann:

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b F_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{Integration darf mit endlichen}\\ \text{Summanden vertauscht werden}}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$$

Man darf also sogar „unendliche“ Summanden mit Integration vertauschen, sofern <u>gleichm.</u> Konvergenz vorliegt!

Sei bspw. eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r gegeben.
Seien $a < b \in \mathbb{R}$ mit $[a,b] \subset (-r,r)$. Dann gilt: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$.

Speziell für die Exponentialreihe: $a_n = \frac{1}{n!}$

Damit: $\int_a^b \exp(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(b^n - a^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(b^n-a^n) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}}_{=\exp(b)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}}_{=\exp(a)}$.

$\int_a^b \exp(x)\mathrm{d}x = \exp(b) - \exp(a)$. $\square$

A Übungsaufgaben

Beweise zu Bemerkung (1.8)

(ii) Wegen $bd \neq 0$ ist $x = \frac{ac}{bd} \Leftrightarrow (bd)x = ac$.
Es genügt daher, zu zeigen, dass

$$
\begin{aligned}
& (bd)((ab^{-1})(cd^{-1})) = ac \quad \text{gilt.}\\
\Leftrightarrow\, & ((db)(b^{-1}a))(cd^{-1}) = ac\\
\Leftrightarrow\, & (cd^{-1})(d[b(b^{-1}a)]) = ac\\
\Leftrightarrow\, & (cd^{-1})(d[(bb^{-1})a]) = ac\\
\Leftrightarrow\, & (cd^{-1})(da) = ac\\
\Leftrightarrow\, & c[d^{-1}(da)] = ac\\
\Leftrightarrow\, & c[(d^{-1}d)a] = ac\\
\Leftrightarrow\, & ca = ac \quad \square
\end{aligned}
$$

(iii) Wegen $d \neq 0$ ist $x = \frac{b}{d} \Leftrightarrow dx = b$.
Es genügt daher, zu zeigen, dass

$$
\begin{aligned}
& d(db^{-1})^{-1} = b \quad \text{gilt.}\\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\, & d(d^{-1}b) = b\\
\Leftrightarrow\, & (dd^{-1})b = b\\
\Leftrightarrow\, & b = b \quad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(*)(xy)(x^{-1}y^{-1}) &= (xy)(y^{-1}x^{-1})\\
&= x[y(y^{-1}x^{-1})] = x[(yy^{-1})x^{-1}]\\
&= xx^{-1} = 1 \Rightarrow (xy)^{-1} = (x^{-1}y^{-1})
\end{aligned}
$$

Beweise zu Bemerkung (1.12)

(i) Es gilt die Definition $x \geq y := x > y \vee x = y$.
Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
& a \geq b \wedge b \geq a\\
\Leftrightarrow\, & (a > b \vee a = b) \wedge (b > a \vee b = a)\\
\Leftrightarrow\, & (a > b \vee a = b) \wedge (b > a \vee a = b)\\
\Leftrightarrow\, & \underbrace{(a > b \wedge b > a)}_{\text{falsch}} \vee \underbrace{(a = b \wedge b > a)}_{\text{falsch}} \vee \underbrace{(a > b \wedge a = b)}_{\text{falsch}} \vee (a = b \wedge a = b)\\
\Leftrightarrow\, & a = b \wedge a = b\\
\Leftrightarrow\, & a = b \quad \square
\end{aligned}
$$

(ii) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& a > b \wedge c > 0\\
\Leftrightarrow\, & a - b > 0 \wedge c > 0\\
\Rightarrow\, & (a - b)c > 0\\
\Leftrightarrow\, & ac - bc > 0\\
\Leftrightarrow\, & ac > bc
\end{aligned}
$$

Zu beweisen ist: $a \geq b, c \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc$.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& a \geq b \wedge c \geq 0\\
\Leftrightarrow\, & (a > b \vee a = b) \wedge (c > 0 \vee c = 0)\\
\Leftrightarrow\, & (a > b \wedge c > 0) \vee (a = b \wedge c > 0) \vee (a > b \wedge c = 0) \vee (a = b \wedge c = 0)\\
\Rightarrow\, & \underbrace{(ac > bc)}_{\text{s.o.}} \vee \underbrace{(ac = bc)}_{a=b} \vee \underbrace{(ac = bc)}_{c=0} \vee \underbrace{(ac = bc)}_{a=b,\ c=0}\\
\Leftrightarrow\, & ac > bc \vee ac = bc\\
\Leftrightarrow\, & ac \geq bc \quad \square
\end{aligned}
$$

(iii) Für $a \geq b,\ b > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& a \geq b\\
\Leftrightarrow\, & a - b \geq 0\\
\Leftrightarrow\, & a^{-1}b^{-1}(a - b) \geq a^{-1}b^{-1}0\\
\Leftrightarrow\, & b^{-1} - a^{-1} \geq 0\\
\Leftrightarrow\, & b^{-1} \geq a^{-1} \quad \square
\end{aligned}
$$

Beweise zu Bemerkung (1.13)

(5)Es wird eine Fallunterscheidung vorgenommen:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq x \leq y & : |x+y| = x+y = |x|+|y| \\ x < 0 \leq y & : \begin{cases} -x \leq y \Rightarrow |x+y| = x+y < (-x)+y = |x|+|y| \\ -x > y \Rightarrow |x+y| = -(x+y) < (-x)+y = |x|+|y| \end{cases} \\ x \leq y < 0 & : |x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = |x|+|y| \end{array}\right\} |x+y| \leq |x|+|y| \qquad \square$$

(6)Nach (5) gilt:

$|a| = |(a \pm b) \mp b| \leq |a \pm b| + |\mp b| = |a \pm b| + |b| \Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a \pm b|$

$|b| = |(b \pm a) \mp a| \leq |a \pm b| + |\mp a| = |a \pm b| + |a| \Leftrightarrow |b| - |a| \leq |a \pm b|$

Es folgt $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b|$. $\square$

Beweise zu Beispielen (1.23)

(ii) IA $(n=1)$: $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = \sum_{\nu=0}^{1}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n-\nu}$

IS:
$$\begin{aligned} &(a+b)^{n+1} \\ &= (a+b)(a+b^n) \\ &\overset{\text{IV}}{=} (a+b)\left(\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n-\nu}\right) \\ &= a\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n-\nu} + b\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{\nu+1}b^{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n+1-\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+1}\binom{n}{\nu-1}a^\nu b^{n+1-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n+1-\nu} \\ &= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu-1}a^\nu b^{n+1-\nu} + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}a^\nu b^{n+1-\nu} + \binom{n}{0}a^0b^{n+1} \\ &= \binom{n}{0}a^0b^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n}\left[\binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu}\right]a^\nu b^{n+1-\nu} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 \\ &\overset{(*)}{=} \binom{n+1}{0}a^0b^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu}a^\nu b^{n+1-\nu} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 \\ &= \sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu}a^\nu b^{n+1-\nu} \qquad \square \end{aligned}$$

$$(*)\ \binom{n}{\nu-1} + \binom{n}{\nu} = \frac{n!}{(\nu-1)!(n-(\nu-1))!} + \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} = \frac{(\nu+(n-\nu+1))n!}{\nu!(n+1-\nu)!} = \frac{(n+1)!}{\nu!((n+1)-\nu)!} = \binom{n+1}{\nu}$$

(iii)a)IA $(n=1)$: $1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2$ ✓

IS: $\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\nu + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ $\square$

b)IA $(n=1,\ a \neq 1)$: $1 + a = \frac{1-a^2}{1-a} \Leftrightarrow (1+a)(1-a) = 1 - a^2$ ✓

IS: $\sum_{\nu=0}^{n+1}a^\nu = \sum_{\nu=0}^{n}a^\nu + a^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$ $\square$

(iv)IA $(n=1)$: $1 + a \geq 1 + a$ ✓

IS:
$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \\ &\overset{\text{IV}}{\geq} (1+na)(1+a) \\ &= 1 + (n+1)a + na^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a \qquad \square \end{aligned}$$

Beweis zu Hilfssatz (1.26)

Sei $M_x = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.
Diese Teilmenge reeller Zahlen besitzt nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum.
x ist offensichtlich eine obere Schranke von M_x, also gilt $\sup M_x \leq x$. Sei $[x] := \sup M_x$.
Es gilt insbesondere: $[x] \leq x < [x] + 1$. Setze $r_x := x - [x]$. Es muss gelten: $0 \leq r_x < 1$.
Dass diese Darstellung $x = [x] + r_x$ eindeutig ist, folgt aus folgendem Widerspruchsbeweis:
Seien $x = z_{x_1} + r_{x_1}$ und $x = z_{x_2} + r_{x_2}$ mit $z_{x_1}, z_{x_2} \in \mathbb{Z}$, $z_{x_1} \neq z_{x_2}, r_{x_1}$, $r_{x_2} \in \mathbb{R}$, $r_{x_1} \neq r_{x_2}$ zwei Darstellungen derselben Zahl. Es gilt: $z_{x_1} + r_{x_1} = z_{x_2} + r_{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_{x_1} - r_{x_2} = z_{x_2} - z_{x_1}$.
Sei o.B.d.A. $z_{x_1} < z_{x_2}$, so folgt $0 < z_{x_2} - z_{x_1} = r_{x_1} - r_{x_2} \leq r_{x_1} < 1$. $\lightning\,(z_{x_2} - z_{x_1} \in \mathbb{Z})$ $\square$

Beweis zu Bemerkung (1.31)

Merke: Es gilt $M \cup N = M \cup (N \setminus M)$, denn:

$$\begin{aligned} M \cup (N \setminus M) =& \{x : x \in M \vee (x \in N \wedge x \notin M)\} \\ =& \{x | (x \in M \vee x \in N) \wedge (x \in M \vee x \notin M)\} \\ =& M \cup N \end{aligned}$$

Seien M und N endliche Mengen.
Da M und $N \setminus M$ disjunkt sind, gilt: $\#M \ + \ \#(N \setminus M) = \#(M \cup (N \setminus M)) = \#(M \cup N)$.
Da $\#M, \#(N \setminus M)$ natürliche Zahlen sind, ist $\#(M \cup N)$ auch eine natürliche Zahl und somit ist $M \cup N$ ebenfalls eine endliche Menge. □

Beweis zu Bemerkung (1.32)

Induktionsanfang: Sei $M = \{x\}$ eine Menge reeller Zahlen mit $\#M = 1$, so gilt $\max M = \min M = x$.
Induktionsschritt: Eine Menge M reeller Zahlen mit $\#M = n$ besitzt ein Maximum und ein Minimum. Fügt man ein beliebiges weiteres Element $y \notin M$ zur Menge hinzu, so gilt für die Menge $M' := M \cup \{y\}$:
$\max M' = \begin{cases} y & \text{für } y > \max M \\ \max M & \text{sonst} \end{cases}, \quad \min M' = \begin{cases} y & \text{für } y < \min M \\ \min M & \text{sonst} \end{cases}$
Die Menge M' besitzt also ein Maximum und ein Minimum und hat $n + 1$ Elemente. □

Beweis zu Definition (1.35)

Nennen wir die Zahl x aus Definition (1.35) an dieser Stelle ϵ, so gilt nach dieser Definition:
$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |a_n| > \epsilon \forall n \geq N \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{|a_n|} < \epsilon \forall n \geq N \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |b_n| < \epsilon \forall n \geq N.$

Stichwortverzeichnis