421011 *10 Punkte*

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 6 & 3 & 4 & 2 \\
+ & & 8 & 5 & 0 & 7 \\
\hline
 & 1 & 4 & 8 & 4 & 9
\end{array}
$$

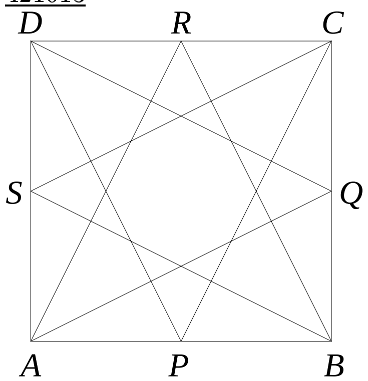
ist offenbar eine Lösung. Da die Belegungen von I und A und die von R und M ohne Konsequenzen für die Rechnung vertauschbar sind, folgen aus diesem Beispiel insgesamt vier Lösungen.

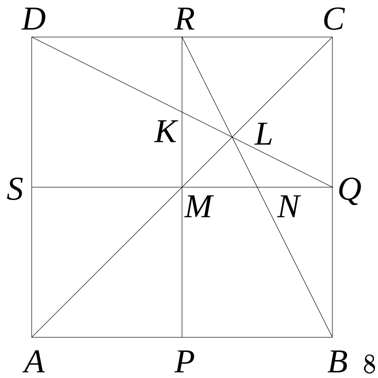
421012 *10 Punkte*

a) Wenn man anstelle von drei Originalpackungen nur eine und dazu ein Nachfüllpack kauft, wird zwar das Verpackungsmaterial von zwei Originalpackungen eingespart, aber die Verpackung des Nachfüllpacks wird zusätzlich benötigt. Die Einsparung beträgt daher nicht mehr als zwei Drittel, also erst recht weniger als 75%.

b) Aus der Annahme folgt: Für ein Nachfüllpack benötigt man nur ein Viertel des Verpackungsmaterials von zwei Originalpackungen, also die Hälfte des Verpackungsmaterials einer Originalpackung. Für eine Originalpackung und zwei Nachfüllpacks benötigt man also ebenso viel Verpackungsmaterial wie für $1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$ Originalpackungen. Das sind $\frac{2}{5}$ des Verpackungsmaterials von 5 Originalpackungen. Die Einsparung beträgt demnach $\frac{3}{5}$, also 60%.

421013 *10 Punkte*





Die linke Abbildung zeigt das ausgeschnittene Achteck. Zur Herleitung wird die rechte Abbildung benutzt. Die Seitenlänge des Quadrats sei a. Die Mittelparallelen $\overline{SQ}$ und $\overline{PR}$ werden von ihrem Schnittpunkt M halbiert. Deshalb folgt aus der Strahlensatzfigur $RMPBN$:

$$|MN| = \frac{1}{2}|PB| = \frac{1}{4}a.$$

Das Dreieck MNR hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}$. Entsprechend ist

$$|MK| = \frac{1}{2}|SD| = \frac{1}{4}a \text{ und } |KR| = \frac{1}{4}a.$$

Da die Dreiecke KML und RKL außerdem in der von L ausgehenden Höhe übereinstimmen, haben sie denselben Flächeninhalt. Da die Gesamtfigur achsensymmetrisch bezüglich der Diagonalen $\overline{AC}$ ist, sind die Dreiecke KML und LMN kongruent. Jedes der Dreiecke RKL, KML und LMN hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{16}$. Das Achteck besteht aus 8 zu KML kongruenten Dreiecken, hat also den Flächeninhalt $\frac{a^2}{6}$.
Der Anteil des Achtecks am Flächeninhalt des Quadrats beträgt demzufolge $\frac{1}{6}$.

421014 *10 Punkte*

a) Wegen $8 = 2 \cdot 80 - 8 \cdot 19$ kann Schillo den Betrag von 8 Schilling bezahlen, indem er zwei 80-Schilling-Münzen gibt und acht 19-Schilling-Münzen zurückerhält.

   Entsprechend kann er wegen $98 = 22 \cdot 19 - 4 \cdot 80$ den Betrag von 98 Schilling bezahlen.

b) Man kann wegen $1 = 5 \cdot 80 - 21 \cdot 19$ jeden ganzzahligen Betrag bezahlen. Diese Gleichung findet man z.B. wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} 80 - 4 \cdot 19 & = & 4 & | \cdot 5 \\ 5 \cdot 80 - 20 \cdot 19 & = & 20 & | - 19 \\ 5 \cdot 80 - 21 \cdot 19 & = & 1 & \end{array}$$

<u>421015</u> *10 Punkte*

Im Folgenden werden a und b als positive natürliche Zahlen vorausgesetzt.
Für $a = 1$ ist jeder Bruch $\frac{a}{b}$ ein Stammbruch.
Die übrigen Brüche $\frac{a}{b}$ mit $0 < a < b$ werden in der Reihenfolge steigender Werte der Summe $a + b$ durchprobiert:
Für $a + b \leq 4$ gibt es keine weiteren solchen Brüche.

$$\begin{array}{ll} a+b=5: & \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \\ a+b=6: & \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ a+b=7: & \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5},\ \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \\ a+b=8: & \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \\ a+b=9: & \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7},\ \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Im Fall $a + b = 9$ bleibt nur noch der Bruch $\frac{4}{5}$ zu untersuchen.
Behauptung: $\frac{4}{5}$ lässt sich nicht als Summe zweier Stammbrüche darstellen, d.h. für alle natürlichen Zahlen c, d mit $0 < c \leq d$ gilt $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \neq \frac{4}{5}$.
Beweis:

1. $c = 1$: Für alle $d \geq 1$ gilt $\frac{1}{1} + \frac{1}{d} > 1 > \frac{4}{5}$.
2. $c = 2$: Für $2 \leq d \leq 3$ gilt $\frac{1}{2} + \frac{1}{d} \geq \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$. Für $d \geq 4$ gilt $\frac{1}{2} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.
3. $c \geq 3$: Dann gilt auch $d \geq 3$ und $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

Damit ist gezeigt: Die Zahl $\frac{4}{5}$ und nur diese hat die geforderten Eigenschaften.

<u>421016</u> *10 Punkte*

a) Es könnte Thomas verwundert haben, dass er bei jeder Einsetzung den Funktionswert 0 erhält.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^4 + 1 > 0$ und $\sqrt{x^4 + 1} > x^2$, also $x^2 - \sqrt{x^4 + 1} \neq 0$. Deshalb ist $f(x)$ für alle reellen Zahlen x definiert.

   Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2 + \sqrt{x^4+1})(x^2 - \sqrt{x^4+1}) + 1}{x^2 - \sqrt{x^4+1}} \\ &= \frac{x^4 - (x^4+1) + 1}{x^2 - \sqrt{x^4+1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Der Wertebereich der Funktion f besteht also nur aus der Zahl 0.