Übungsaufgaben Teil 1

1. a) Zeigen Sie, daß für alle $m \in I\!N$ gilt:
m ist durch 6 teilbar $\Longleftrightarrow m^2$ ist durch 6 teilbar.
b) Zeigen Sie, daß a) nicht gilt, wenn man die Zahl 6 durch 8 ersetzt.
c) Zeigen Sie, daß $\sqrt{6}$ irrational ist.
d) Zeigen Sie, daß $\sqrt{8}$ irrational ist.

2. Zeigen Sie, daß für alle $\alpha \in I\!R$ und $k \in I\!N$ gilt:

$$a)\ \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} = \binom{\alpha+1}{k} \qquad b)\ k\binom{\alpha}{k} = \alpha\binom{\alpha-1}{k-1}$$

$$c)\ \binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k(2k)!}{4^k(k!)^2} \qquad d)\ \binom{-4}{k} = (-1)^k\binom{k+3}{3}.$$

3. Berechnen Sie für alle $n \in I\!N$

$$a)\ \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k-2} \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} \qquad d)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

4. Beweisen Sie jeweils durch vollständige Induktion

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\ , \qquad (n \in I\!N)$

b) $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}q^k = \frac{q^{n_0}-q^{n+1}}{1-q}\ , \qquad (q \in I\!R - \{1\}\ ,\ n_0 \in I\!N_0\ ,\ n \geq n_0)$

c) $2^n < n!$ für alle $n \geq n_0$, $n_0 =?$

d) $2^n > n^2$ für alle $n \geq n_0$, $n_0 =?$

5. Zeigen Sie, daß für alle $n \in I\!N$ mit $n \geq 4$ gilt:

$$2.4 < (1+\frac{1}{n})^n < 2.8\ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\displaystyle\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$,und benutzen Sie dann Aufgabe 4.c) und b).

6. Bestimmen Sie alle $x \in I\!R$, für die gilt:

a) $x(x^2+3x-1) > 3$ b) $|x-3| \leq |2x+1|$

c) $|x+1| + |x-2| < 4$ d) $\displaystyle\frac{2x}{x+4} < x$.

7. Zeigen Sie, daß für alle $a \geq 0$, $b \geq 0$ und **n=1,2,3** gilt:

$$\sqrt{(ab)^n} \leq (\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}.$$

8. a) Bestimmen Sie die Dualdarstellungen folgender Dezimalzahlen:
19.2, 21.3, $\frac{2}{9}$, 118.75.

b) Führen Sie die 4 Grundrechenoperationen für die beiden Dualzahlen 11100 und 1101 im Dualsystem aus. Führen Sie dabei die Subtraktion einmal direkt und einmal durch Zurückführung auf die Addition aus.

9. Sei $p(x) = 2x^4 + 3x^2 - 4x + 1$.

a) Geben Sie zwei Intervalle $[a, b]$ der Länge $\leq 1/8$ an, in denen jeweils mindestens eine Nullstelle von p liegt. Berechnen Sie dabei die Funktionswerte $p(x)$ mit dem Horner-Schema.

b) Entwickeln Sie $p(x)$ nach Potenzen von $x - a = x + 3$.

c) Berechnen Sie $p^{(k)}(2)$ für alle $k \in I\!N_0$.

10. Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $p(x) = x^5 + x^4 - 25x^3 - 49x^2 + 84x + 180$

b) $p(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$

c) $p(x) = x^6 - 1$

d) $p(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 24x - 16$.

11. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument der Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen

a) $z = \dfrac{2+3i}{1-2i} + \dfrac{(1+2i)^4}{2+i}$ *b)* $z = (1 + i\sqrt{3})^{12}$

c) $z^2 = 5 - 12i$ *d)* $z^2 + (2 - 4i)z - (3 + 2i) = 0$.

12. Welche Punkte der Gaußschen Zahlenebene werden durch die folgenden Bedingungen dargestellt ? (mit Skizze!)

a) $|z + i| \geq 2|z - i|$ *b)* $|z - 2i| + |z + i| \leq 5$

c) $0 < Re(z^2) < 1$ *d)* $0 < arg(z^2) < \dfrac{\pi}{2}$.

13. Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ alle Nullstellen der folgenden Polynome p , und zerlegen Sie jeweils p <u>*in*$I\!R$</u> in lineare und quadratische Faktoren

a) $p(z) = z^6 - 1$, b) $p(z) = z^6 + 1$,

c) $p(z) = z^4 - z^3 + 4z^2 + 3z + 5$ ($z = 1 - 2i$ ist Nullstelle),

d) $p(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$.

14. Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ (mit Skizze) der Gleichungen

a) $z^2 + i = 0$ *b)* $z^4 - i = 0$

c) $z^5 + 4(1 + i) = 0$ *d)* $z^3 + \sqrt{3} - i = 0$.

15. Führen Sie für die beiden folgenden Funktionen jeweils eine Partialbruchzerlegung durch

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - x}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}$, b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 3}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}$.

16. Die Punkte $P_1(2,1,5)$, $P_2(-1,2,-2)$ und $P_3(2,-1,4)$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, in der das Dreieck liegt.
b) Berechnen Sie die Winkel in diesem Dreieck.
c) Bestimmen Sie die Höhe von P_3 aus auf die gegenüberliegende Seite.
d) Berechnen Sie den Inhalt des Dreiecks auf drei verschiedene Arten.

17. Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Prüfen Sie nach, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_1 , die von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aufgespannt wird und den Punkt P_0(1,0,0) enthält. Geben Sie auch die lineare Form der Ebene E_1 an.
c) Bestimmen Sie die lineare Form der Ebene E_2, die die Punkte $P_1(1,3,1)$ und $P_2(2,-1,0)$ enthält und senkrecht auf E_1 steht.
d) Bestimmen Sie die Schnittgerade g von E_1 und E_2, und berechnen Sie den Abstand vom Punkt $Q(1,0,1)$ zur Ebene E_1.

18. Zeigen Sie, daß für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in I\!R^3$ gilt:

a) $< (\vec{x} - \vec{y}) \times (\vec{y} - \vec{z}), \vec{x} > = < \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} >$

b) $< (\vec{x} \times \vec{y}) \times (\vec{y} \times \vec{z}), \vec{y} > = < \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} > |\vec{y}|^2$

c) $< \vec{y} \times (\vec{x} \times \vec{y}), \vec{x} > = |\vec{x} \times \vec{y}|^2$

d) $\vec{x} \times (\vec{x} \times (\vec{x} \times \vec{y})) = |\vec{x}|^2 (\vec{y} \times \vec{x})$.

19. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie - falls möglich - AC , CA , $\mathrm{A}^T\mathrm{C}$, BA , ABD , $\mathrm{A}^T + 3\mathrm{C}$, $\mathrm{B}^T\mathrm{A}^T$, $\mathrm{D}^T\mathrm{D}$, DD^T .

20. Bestimmen Sie die Matrizen, die die folgenden linearen Abbildungen induzieren:

a) Drehung um die Achse $(x = y \ , \ z = 0)$ um 90°.
b) Spiegelung an der Ebene $x - 2y + z = 0$.

Prüfen Sie jeweils die Orthogonalität der Matrix nach, und zeigen Sie, daß die Vektoren, die in der Drehachse bzw. in der Ebene liegen, bei Anwendung der Matrix unverändert bleiben.

21. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ sei die übliche Basis des $I\!R^4$. Zeigen Sie, daß die Vektoren $\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{e}_3{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_4{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ebenfalls eine Basis des $I\!R^4$ bilden. Drücken Sie die alten Basisvektoren $\vec{e}_i$ und den Vektor $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$ durch die neuen Basisvektoren $\vec{e}_i{}'$, (i=1,2,3,4), aus.

22. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden GLS :

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 6 & 11 & 2 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & 6 & 7 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix an.

23. Für welche $t \in I\!R$ ist das folgende GLS lösbar ? Bestimmen Sie in diesen Fällen die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 2 \\ 2 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & t \\ t & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

24. Gegeben sei das GLS $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix und zeigen Sie, daß das GLS eindeutig lösbar ist.
b) Berechnen Sie die Lösung des GLS (mit Gauß-Algorithmus und Bruchrechnung).
c) Bestimmen Sie eine Näherungslösung, indem Sie den Gauß-Algorithmus mit diagonaler Pivotwahl und Dezimalrechnung (mit drei gerundeten Stellen nach dem Komma) benutzen.

25. a) Berechnen Sie - falls möglich - die Inversen zu folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das GLS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b}^{\,T} = (1, 0, 2, -1)$.
c) Welche Eigenschaften besitzt die Matrix B ?

26. Berechnen Sie die folgenden Determinanten

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \end{vmatrix} \quad , \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

27. Berechnen Sie für alle $t \in I\!R$, für die das folgende GLS lösbar ist, die allgemeine Lösung. Benutzen Sie in den Fällen, in denen es möglich ist, die Cramer–Regel.

$$\begin{pmatrix} \sin t & 1 & t \\ t & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

28. Berechnen Sie mit Hilfe der Cramer-Regel die Inversen der folgenden Matrizen:

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b)\ \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1-i & 1+2i \\ 1 & 1+i & 1-2i \end{pmatrix}.$$

29. Die Matrix A=$\frac{1}{7}$B mit B=$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ erzeugt eine Spiegelung an einer Ebene E.

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B, und geben Sie jeweils die Dimension und eine Basis der Eigenräume an.
b) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen A und A^{-1} an.
c) Geben Sie die Ebene E in Parameterform und in Hessescher-Normalform an.

30. Berechnen Sie die (komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ -7 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

31. V sei der von den Vektoren
$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte lineare Unterraum des $I\!R^4$. Geben Sie die Dimension und eine orthonormale Basis von V an. Prüfen Sie nach, ob der Vektor $\vec{x} = (1,1,1,1)^T$ zu V gehört.

32. Prüfen Sie nach, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind, und führen Sie ggf. die Diagonlisierung aus (mit Probe):

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad b)\ \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

33. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie A^n für alle $n \in I\!N$.

34. Welche Punktmenge in der (x,y)-Ebene wird durch die Gleichung
$13x^2 + 13y^2 - 10xy - 68x + 4y + 28 = 0$ dargestellt ?
Geben Sie den Mittelpunkt (bzw. Scheitelpunkt) und die Hauptachsen des Kegelschnittes an (mit Skizze).

35. Berechnen Sie

$$\min_{x^2+y^2=1}(4x^2 + 6y^2 - 4xy) \quad \text{und} \quad \max_{x^2+y^2=1}(4x^2 + 6y^2 - 4xy).$$

Geben Sie jeweils die x und y an, für die das Maximum bzw. Minimum angenommen wird.

36. Untersuchen Sie die folgenden reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in I\!N}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^4 + 3n + 5}}$ *b)* $a_n = \sqrt{4n + \sqrt{n}} - \sqrt{4n - \sqrt{n}}$

c) $a_n = \dfrac{n^k}{q^n}$, $(k \in I\!N_0, q > 1)$ *d)* $a_n = \sqrt[n]{n+2}$.

37. $(a_n)_{n\in I\!N}$ sei eine gegen $a \in I\!R$ konvergente reelle Folge.
Zeigen Sie, daß dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, falls $a \geq 0$ and $a_n \geq 0$ für alle $n \in I\!N$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a.$

38. Sei $a \in I\!R$ mit $a \geq 1$.

a) Zeigen Sie, daß die durch $a_0 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$, $(n \in I\!N_0)$, definierte Folge $(a_n)_{n\in I\!N}$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß die folgende Ungleichung gilt:

$|a_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2}|a_n - \sqrt{a}|^2$ (quadratische Konvergenz).

c) Berechnen Sie $\sqrt{5}$ auf 6 Stellen nach dem Komma genau.

39. Untersuchen Sie die folgenden komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in I\!N}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

a) $a_n = (1 - \dfrac{1}{n})^{3n} + \dfrac{i}{n^5}\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$ *b)* $a_n = \dfrac{n^3 + 3in^2 - 5}{in^3 + 6}$

c) $a_n = \dfrac{(1+2i)^n}{n^5}$ *d)* $a_n = \dfrac{1}{n}e^{in\pi/8}$.

40. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie ggf. den Grenzwert:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 1}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)!}$ *d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1} - n)$.

41. Zeigen Sie, daß die folgenden Reihen konvergent sind. Berechnen Sie jeweils den Grenzwert bis auf einen Fehler $< 10^{-6}$:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n8^n} \quad , \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)!} \quad , \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad , \quad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n!} .$$

42. Untersuchen Sie die folgenden komplexen Reihen auf Konvergenz:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2i)^2} \quad , \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2-i}{3+i})^n \quad , \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2+i)^n} \quad , \quad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} i^n .$$

Geben Sie bei b) den Grenzwert an.

43. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produkts:

a) $$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)^3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n \quad , \quad (|x| < 1) ,$$

b) $$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\Big) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \ (x \in \mathbb{R}).$$

c) Geben Sie für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ in ihrem Konvergenzbereich einen geschlossenen Ausdruck an.

44. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} x^{2n+1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{qn}}{(n+1)!} x^n \quad , \quad (q > 0)$$

$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n^2 4^n) x^n \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(5n-1)!} x^{2n} .$$

Geben Sie für c) einen geschlossenen Ausdruck an.

45. Geben Sie für die folgenden Funktionen f jeweils den Definitionsbereich an, und skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen. Geben Sie jeweils mindestens ein Intervall an, in dem die Funktionen umkehrbar sind, skizzieren Sie die Graphen der Umkehrfunktionen, und geben Sie jeweils eine Funktionsvorschrift der Umkehrfunktionen an:

$$a)\ f(x) = x^2 - 2x - 1 \qquad b)\ f(x) = \sqrt{x+1} + x$$

$$c)\ f(x) = x - \frac{x}{|x|} \qquad d)\ f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} .$$

46. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n , $(n \in I\!N)$, in der Potenzreihe

$$e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a) mit Hilfe der Multiplikation bekannter Potenzreihen,

b) mit Hlife der komplexen Potenzreihe von e^z.

Überprüfen Sie außerdem, daß in beiden Fällen die Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_6$ gleich sind.

47. a) Drücken Sie $\sin^6 x, \cos^6 x, \sin^7 x$ und $\cos^7 x$ durch $\sin kx$ und $\cos kx, (k \in I\!N_0)$, aus.

b) Drücken Sie $\sin 6x, \cos 6x, \sin 7x$ und $\cos 7x$ durch $\sin^k x$ und $\cos^k x, (k \in I\!N)$, aus.

48. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

a) $e^z = 2$, b) $\cos z = 0$, c) $\sin z = 4$, d) $\sin 2z = 8 \cos z$.

49. Zeigen Sie:

a) $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$,

b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \leq 1$,

c) $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $x \in I\!R$,

d) $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$.

50. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in den angegebenen Intervallen. Bestimmen Sie ggf. die Grenzfunktion.

a) $f_n(x) = (\dfrac{x^n - 1}{x^n + 1})^2$

$\alpha)$ $x \in [0, \infty)$, $\beta)$ $x \in [0, q]$, $(0 < q < 1)$, $\gamma)$ $x \in [q, \infty)$, $(q > 1)$.

b) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } 0 \leq x \leq n-1 \text{ oder } x \geq n+1 \\ x - n + 1 & \text{, falls } n - 1 \leq x \leq n \\ n + 1 - x & \text{, falls } n \leq x \leq n+1 \end{cases}$

$\alpha)$ $x \in [0, \infty)$, $\beta)$ $x \in [0, q]$, $(q > 0)$.

51. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitions- und Stetigkeitsbereich an. Berechnen Sie - falls möglich - die ersten beiden Ableitungen, bestimmen Sie das Monotonieverhalten, und skizzieren Sie grob die Graphen:

a) $f(x) = \ln \sqrt{\tanh(2x)}$ *b)* $f(x) = \arctan(\sinh x)$

c) $f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$ *d)* $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

52. Wie müssen die folgenden Funktionen in x=0 definiert werden, damit sie dort stetig sind ? Existiert dann auch $f'(0)$ und $f''(0)$?

a) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

c) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ *d)* $f(x) = e^{-(1/x)^2}$.

53. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f mit f(x)=$e^{\alpha x}$, ($\alpha \in I\!R$) , ist die einzige in $I\!R$ stetig differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung $y' - \alpha y = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt.

b) Die Funktion f mit f(x)=$\sin \omega x$, ($\omega > 0$) , ist die einzige in $I\!R$ 2-mal stetig differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = \omega$ erfüllt.

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktionen

a) $h(x) = \frac{g(x)}{e^{\alpha x}}$, b) $h(x) = \omega^2 (g(x) - \sin \omega x)^2 + (g'(x) - \omega \cos \omega x)^2$.

54. Untersuchen Sie, für welche $x \in I\!R$ die folgenden Reihen stetig bzw. differenzierbar sind, und bestimmen Sie ggf. die erste Ableitung:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos nx}{n^3}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

55. a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$, und geben Sie für f einen geschlossenen Ausdruck an.

b) Zeigen Sie, daß für alle $x \in I\!R$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x \ .$$

56. a) Berechnen Sie für die Funktion f mit f(x)=ln(sin x) das Taylorpolynom $T_{3,\pi/2}(x)$ vom Grad ≤ 3 um $x_0 = \pi/2$. Schätzen Sie den maximalen Fehler

$|f(x) - T_{3,\pi/2}(x)|$ für $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ab.

b) Berechnen Sie für die tan-Funktion die ersten 7 Glieder der Taylorreihe um $x_0 = 0$ durch Division der sin- und cos-Reihen.

57. Berechnen Sie die Taylorreihe um x_0 für die folgenden Funktionen

a) f(x)=$\dfrac{2x^2 - x - 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$, ($x_0 = 0$) , b) f(x)=$x^2 \ln x$, ($x_0 > 0$) .

Wo werden die Funktionen durch ihre Taylorreihen dargestellt ?

58. Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch (einschließlich Skizze):

a) f(x)=$\dfrac{x^2 - 3}{x(2x-3)}$, b) f(x)=$\begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{, falls x} \neq 0 \\ 0 & \text{, falls x=0} \end{cases}$.

59. Führen Sie für die Funktion f mit f(x)=$e^x - x^2 - x + 1$ eine Kurvendiskussion durch. Berechnen Sie die Nullstellen und Extremstellen mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf 4 Stellen nach dem Komma genau.

60. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\ln(1-x)}{x\ \sin^2 x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \big(\dfrac{1}{x} - \cot x\big)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\cos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\big)^x$ *d)* $\lim\limits_{x\to c+} \big(\dfrac{1}{x-c} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^c}\big)$, $(c \in I\!R)$.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten bzw. bestimmten Integrale:

61.

a) $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\ dx$, $(\alpha \in I\!R)$ *b)* $\displaystyle\int (x+1)\arctan x\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\ dx$ *d)* $\displaystyle\int \cos^7 x\ dx$.

62.

a) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\ dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{5+4x+x^2}}\ dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}\ dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}\ dx$.

63.

a) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3-3x-4}{x^4+x^3-2x}\ dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+9x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}\ dx$.

64.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\ dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x}{1+\cosh x}\ dx$.

65.

a) $\displaystyle\int xe^{4x}\cos 3x\ dx$, b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin nx \cos mx\ dx$, $(n, m \in I\!N)$.

66. Prüfen Sie nach, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent sind:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+2}{2x^4+3x^2+2}\ dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\ dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3+2x+3}}\ dx$.

Hinweis: Führen Sie c) durch partielle Integration auf b) zurück.

67. Berechnen Sie - falls konvergent - das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+4}\ dx\ .$$

68. Berechnen Sie - falls konvergent - die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\ dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\ dx$, $(n \in I\!N_0)$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\ dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\ dx$, $(n \in I\!N_0)$.

69. Gegeben sei die Kurve $\mathrm{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = t\sin t, y = t\cos t \ , \ 0 \le t \le \pi/2 \right\}$.

Skizzieren Sie diese Kurve, berechnen Sie die Bogenlänge und den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse.

70. Lösen Sie die Anfangswertaufgaben (AWA)

a) $y' = \dfrac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}$, $y(0) = 2$, *b)* $y' = x\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 0$,

c) $y' = xe^{x+y}$, $y(1) = 0$, *d)* $y' = (y^2-1)\tan x$, $y(0) = 0$.

Bestimmen Sie für a), b), c) und d) auch jeweils eine Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

71. Lösen Sie die AWA

a) $y' + \dfrac{\sin x}{1+2\cos x} y = \sin 2x$, $y(0) = 1$,

b) $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} y = \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 1$.

72. a) Zeigen Sie , daß $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\ln x$, $y_3(x) = \frac{1}{x}$ linear unabhängige Lösungen der linearen homogenen DGL .

$$y''' + \frac{2}{x}y'' - \frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = 0 \quad \text{in} \quad (0,\infty) \text{ sind.}$$

b) Bestimmen Sie die lineare homogene DGL (mit konstanten Koeffizienten) kleinsten Grades, die die Lösungen $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\sin x$, $y_3(x) = \mathrm{e}^{-x}$ besitzt. Wie sieht die allgemeine Lösung aus ?

73. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + \alpha^2 y = 2x + \sin 3x \quad , \quad (\alpha \in [0,\infty)).$$

b) Bestimmen Sie die Lösungen der linearen DGL

$$y^{(5)} - y''' - 2y'' + 2y' = \mathrm{e}^{-x} \quad , \quad \text{die für } x \to \infty \text{ beschränkt bleiben.}$$

74. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + 2y' + y = \sinh x + \sin^2 x.$$

b) Lösen Sie die AWA

$$y'' - 4y' + 5y = (1+x)\mathrm{e}^{2x}\cos x \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

75. Bestimmen Sie die in $[0,\infty)$ stetig differenzierbare Lösung der AWA

$$y'' + 2y' + y = \begin{cases} 2\sin x & , 0 \le x \le \pi \\ 0 & , x > \pi \end{cases} ,$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

76. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' - y = \frac{1}{\cosh x} + \cosh x.$$

Übungsaufgaben Teil 2

77. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich und die Höhenlinien der Funktionen

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Sind die Funktionen in $\binom{0}{0}$ stetig ergänzbar ?
Skizzieren Sie jeweils die zu f gehörenden Flächen des $\mathbb{R}^3$.

78. Untersuchen Sie , in welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ die beiden folgenden Funktionen stetig , partiell differenzierbar bzw. differenzierbar sind :

$$\text{a)}\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{, falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{, falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases} , \quad \text{b)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{, falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{, falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases} .$$

Hinweis : Zeigen Sie , daß $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq 1$ für alle $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ ist.

79. a) Zeigen Sie , daß die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x-2yz} + x^2 \sin(x-y)\cos z$ in $\mathbb{R}^3$ differenzierbar ist.

Berechnen Sie an der Stelle $(1,1,0)^T$

$\alpha)$ grad f , $\beta)$ die Richtungsableitung in Richtung zum Nullpunkt , $\gamma)$ die Richtung, in der die Richtungsableitung ihren maximalen Wert annimmt. Geben Sie diese Richtung an.

b) Zeigen Sie , daß die Funktionen $f : \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$\alpha)$ $f(x,y) = x \arctan\frac{x}{y}$, $\beta)$ $f(x,y) = x \ln\sqrt{\frac{x+y}{y}}$ differenzierbar sind und die partielle DGL $xf_x + yf_y = f$ erfüllen.

80. Zeigen Sie , daß die Besselfunktionen J_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ mit

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\, dt$$

Lösungen der Besselschen DGL $x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$ sind mit
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (falls n=0)
$y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ (falls n=1)
$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (falls n>1) .
Hinweis : Benutzen Sie bei $J_n'(x)$ die partielle Integration.

81. Die Funktion f sei definiert für $x \geq 0$ durch

$$f(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(t^2+\frac{x}{t^2})}\, dt .$$

Zeigen Sie , daß f für $x \geq 0$ stetig und für $x > 0$ differenzierbar ist. Berechnen Sie f' , drücken Sie f' durch f aus (*Hinweis* : Benutzen Sie die Substitution $s = \sqrt{x}/t$) , und geben Sie mit Hilfe dieser DGL f in geschlossener Form an .

82. a) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ mit $M = \mathbb{R}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$ und

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Zeigen Sie, daß $f \in C^2(M)$ und daß f in M die Laplace-Gleichung $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz} = 0$ erfüllt. Zeigen Sie direkt, daß in M gilt: $f_{xy} = f_{yx}$.

b) Sei $h : M \to \mathbb{R}$ mit $M = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : r > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$ und $h(r,\varphi) = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$, $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, daß $h \in C^2(M)$ und daß h in M die Laplace-Gleichung $h_{rr} + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\varphi\varphi} = 0$ erfüllt.

83. Gegeben seien die Funktionen

$\alpha)$ $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$, $\beta)$ $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie jeweils für $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ die Funktionalmatrix, Funktionaldeterminante und Divergenz von $\vec{f}$. Berechnen Sie die Inverse der Funktionalmatrix für die $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, für die die Inverse existiert.

b) Nach Einführung von Polar- bzw. Zylinderkoordinaten erhält man $\vec{h}(r,\varphi) = \vec{f}(x,y)$ bzw. $\vec{h}(r,\varphi,z) = \vec{f}(x,y,z)$. Berechnen Sie die Funktionalmatrix $\frac{\partial(h_1,h_2)}{\partial(r,\varphi)}$ bzw. $\frac{\partial(h_1,h_2,h_3)}{\partial(r,\varphi,z)}$ mit Hilfe der Kettenregel.

84. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2(M)$ und $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.
Nach Einführung von Polarkoordinaten erhalten wir $f(x,y) = h(r,\varphi)$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$. Drücken Sie die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ durch die entsprechenden partiellen Ableitungen h_r, h_φ, h_{rr} usw. aus. Zeigen Sie, daß in M gilt:
$f_{xx} + f_{yy} = h_{rr} + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\varphi\varphi}$.

85. Bestimmen Sie alle Lösungsfunktionen der Laplace-Gleichung $f_{xx} + f_{yy} = 0$ in $\mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ bzw. $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ in $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, die nur vom Radius $r = \sqrt{x^2+y^2}$ bzw. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängig sind (dh. $f(x,y) = h(r)$ bzw. $f(x,y,z) = h(r)$).

86. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \cos^2(x-t)\,dt$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x (x-t)^2 \mathrm{e}^{\cos t}\,dt.$

87. a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = \sin(x+y) + x\cos y$ das Taylorpolynom um $\binom{0}{\pi}$ vom Grad ≤ 3.

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x,y) = x^2y + y^2 + xy$ nach Potenzen von $(x+1)$ und $(y-1)$.

88. a) Gegeben sei die Gleichung $g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0.$ Wo ist diese Gleichung lokal nach y auflösbar? Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen und das Symmetrieverhalten der durch diese Gleichung dargestellten Kurve (einschließlich Skizze).

b) Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $g(x,y) = y^2 + y + x\cos y = 0$ eine eindeutig bestimmte Funktion $y = f(x)$ mit $f(0) = 0$ definiert wird. Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f um $x_0 = 0$ vom Grad ≤ 3.

89. a) Gegeben sei das Gleichungssystem

$$g_1(x,y,u,v) = u^2 - v - 3x - y = 0$$
$$g_2(x,y,u,v) = u - 2v^2 - x + 2y = 0.$$

Wo läßt sich dieses Gleichungssystem lokal nach (u,v) auflösen? Berechnen Sie dort die Funktionalmatrix $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ der Auflösungsfunktion $\binom{u}{v} = \vec{f}(x,y)$.

b) Gegeben sei die Funktion $\vec{f} = \binom{f_1}{f_2} : I\!R^2 \to I\!R^2$ mit $x = f_1(u,v) = u^2 - v^2$, $y = f_2(u,v) = 2uv.$ Wo ist $\vec{f}$ lokal umkehrbar? Berechnen Sie dort die Funktionalmatrix $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ von $\vec{f}^{-1}$.

90. a) Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (x^2-y^2)^2 - 2(x^2+y^2).$$

b) Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ werde im Intervall $[0,1]$ so durch eine Gerade $g(x) = a + bx$ approximiert, daß $F(a,b) = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - a - bx)^2\, dx$ minimal wird. Bestimmen Sie a und b.

91. Bestimmen Sie die relativen und absoluten Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ in M=$\left\{\binom{x}{y} : x^2 + 2y^2 \leq 4\right\}$.

92. Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
a) mit Hilfe von Lagrange-Parametern
b) mit Hilfe der Eigenwerttheorie.

93. Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange-Parametern die kürzeste Entfernung von der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zur Geraden $y + 2x = 0$.

94. a) Zeigen Sie, daß durch $< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ in $C[-1,1]$ ein inneres Produkt definiert ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß das uneigentliche Integral für alle $f,g \in C[-1,1]$ existiert.

b) Schreiben Sie die Schwarzsche- und die Dreiecksungleichung für dieses innere Produkt und die zugehörige Norm $\|f\| = \sqrt{< f,f >}$ in Integralform auf. Bestimmen Sie $\|f\|$ und $\|f-g\|$ für $f(x) = x$ und $g(x) = 1$.

95. Gegeben seien die Funktionen $T_n : [-1, 1] \to I\!R$ mit $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $(n \in I\!N_0)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktionen T_n sind orthogonal bzg. des inneren Produkts aus Aufgabe 94.
b) Die Funktionen T_n erfüllen die DGL $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ und die Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $(n \geq 1)$.
c) T_n ist ein Polynom n-ten Grades.
d) Bestimmen Sie T_0, T_1, T_2 und T_3 als Polynom in x, und skizzieren Sie die zugehörigen Graphen.

96. Berechnen Sie die Fourierreihen der 2π - periodischen Funktionen
a) $f(x) = |\sin x|$, b) $f(x) = |\cos x|$.

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} \quad .$$

97. Gegeben sei die Funktion $g : [0, \pi] \to I\!R$ mit $g(x) = x(\pi - x)$. Setzen Sie diese Funktion so zu einer 2π - periodischen Funktion f fort, daß die zugehörige Fourierreihe
a) nur aus sin - Gliedern
b) nur aus cos - Gliedern besteht.
Berechnen Sie in beiden Fällen die Fourierreihe von f. In welchen Punkten $x \in I\!R$ wird die Funktion f durch ihre Fourierreihe dargestellt?

98. Berechnen Sie die Fourierreihen der 2π - periodischen Funktionen f mit
a) $f(x) = |x|$, für $|x| \leq \pi$,
b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{, für } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & \text{, für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{, für } x = \pm\pi \end{cases}$,
c) $f(x) = |x|^3$, für $|x| \leq \pi$,

durch Integration einer bekannten Fourierreihe.
Wird jeweils die Funktion durch ihre Fourierreihe dargestellt?
Berechnen Sie die Reihenwerte $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

99. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl
$$y'' + \pi^2 y = \begin{cases} |x| & \text{, falls } |x| \leq 1 \\ 2 - \text{periodisch} & \end{cases} .$$

100. Bestimmen Sie die komplexen Fourierreihen der folgenden 2π - periodischen Funktionen f mit
a) $f(x) = \mathrm{e}^{\omega x}$, falls $0 < x < 2\pi$,
b) $f(x) = \cos \omega x$, falls $-\pi < x < \pi$, $(\omega \in I\!R)$.

Geben Sie auch die reellen Fourierreihen an.
Berechnen Sie für $\omega \notin Z\!\!Z$ den Reihenwert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2}$.

101. In $C[0,1]$ sei das innere Produkt $< f,g >= \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ und die Norm $\|f\|_2 = \sqrt{< f,f >}$ gegeben.
a) Orthonormalisieren Sie die Funktionen h_0, h_1 und h_2 mit $h_i(x) = x^i$, $(i = 0,1,2)$.
b) Bestimmen Sie das Polynom p_2 (vom Grad ≤ 2), das die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0,1]$ am besten im quadratischen Mittel approximiert.

102. Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen $(n \in I\!N \;,\; \alpha, \beta \in I\!R)$

a) $f(t) = t^n e^{\alpha t}$ *b)* $f(t) = t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t$

c) $f(t) = e^{\alpha t} \dfrac{\sin t}{t}$ *d)* $f(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$.

103. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Anfangswertaufgaben

a) $y'' - 2y' + y = 2e^t \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
b) $y'' + y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

104. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Anfangswertaufgabe

$$y'' + 2y' + y = \begin{cases} 2\sin t & , \text{ falls } 0 \leq t < \pi \\ 0 & , \text{ falls } t \geq \pi \end{cases} \quad ,$$
$$y(0) = y'(0) = 0 \; .$$

105. a) Berechnen Sie die inversen Laplace-Transformierten
$\alpha)$ $L^{-1}\left(\dfrac{1}{x(x^2+2x+2)}\right)$, $\beta)$ $L^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x^2(x+2)^2}\right)$
mit Hilfe der Faltungseigenschaft.

b) Lösen Sie die Integralgleichung
$$y'(t) = \sin t + \int_0^t y(t-u)\cos u \; du \quad , \quad y(0) = 0 \; .$$

106. Berechnen Sie näherungsweise alle Fixpunkte der Funktion $g(x) = \dfrac{e^{x/2}}{4}$ mit Hilfe des Iterationsverfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ oder $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$.
Bestimmen Sie zunächst geeignete Ausgangsintervalle $[a,b]$, und prüfen Sie nach, ob das Verfahren anwendbar ist. Geben Sie jeweils für die Näherung x_8 eine Fehlerabschätzung an.

107. Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ bis auf einen Fehler $< 10^{-6}$
a) mit Hilfe der Regula falsi
b) mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

108. Berechnen Sie näherungsweise eine Lösung des Gleichungssystems $\vec{f}(x,y) = \vec{0}$ mit

$f_1(x,y) = x^3 - y^3 - 1 = 0$
$f_2(x,y) = x^2y^2 - 2 = 0$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Ausgehend vom Startvektor $\binom{x_0}{y_0} = \binom{1}{1}$ sollen die beiden nächsten Näherungen $\binom{x_1}{y_1}$ und $\binom{x_2}{y_2}$ berechnet werden. Bestimmen Sie jeweils auch $|\vec{f}(x_i,y_i)|$ für $i = 0,1,2$.

109. a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ der Funktion $f(x) = \sin x$ an den Stützstellen $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \pi$ (Newton-Schema benutzen!). Schätzen Sie den Fehler $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |\sin x - p_4(x)|$ ab.

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$, das die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $[0,1]$ an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ mitsamt 1.Ableitungen interpoliert. Schätzen Sie den Fehler $\max\limits_{x\in[0,1]} |\mathrm{e}^x - p_3(x)|$ ab.

110. Berechnen Sie näherungsweise $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,dx$ mit Hilfe der Trapez-Regel $T_{\frac{1}{4}}$ und mit Hilfe der Simpson-Regel $S_{\frac{1}{2}}$. Schätzen Sie jeweils den Fehler $|I - T_{\frac{1}{4}}|$ und $|I - S_{\frac{1}{2}}|$ ab.

111. Berechnen Sie näherungsweise $\displaystyle\int_0^1 \cos(\sin \pi x)\,dx$, indem Sie ausgehend von der Schrittweite $h = 1$ die Werte S_h , $S_{\frac{h}{2}}$, $S_{\frac{h}{4}}$ usw. berechnen bis $|S_{\frac{h}{2^{n+1}}} - S_{\frac{h}{2^n}}| < 10^{-6}$ ist.

112. Formen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale mit Hilfe partieller Integation oder geeigneter Substitution so um, daß die Abschneidemethode sinnvoll eingesetzt werden kann. Hierbei soll die Intervalllänge der numerisch zu berechnenden Integale höchstens 20 betragen und der Fehler des abgeschnittenen Restintegrals betraglich kleiner als 10^{-4} sein:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3(x+4)}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}^5 + 3}\,dx$.

113. Die Randwertaufgabe $y'' - 4y = \sin \pi x$, $y(0) = y(1) = 0$, soll mit Hilfe des Differenzenverfahrens näherungsweise berechnet werden. Schreiben Sie das zugehörige GLS für y_1 , y_2 ,..., y_{n-1} für $n = 4$ auf $(x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$,..., $x_4 = 1)$.
Lösen Sie das GLS und vergleichen Sie y_i mit $y(x_i)$ ($y(x)$ exakte Lösung) für $i = 1,2,3$.

114. Sei $I = \{\binom{x}{y} : 0 \le x \le \pi \text{ , } 0 \le y \le \alpha\}$, $(0 < \alpha < 1)$, $f : I \to I\!R$ mit

$$f(x,y) = \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2} \;.$$

a) Zeigen Sie , daß f in I stetig ist.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_I f(x,y)\,d(x,y)$.

c) Zeigen Sie , daß für alle $y \in I\!R$ mit $0 \le y \le \alpha$ gilt : $\displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\,dx = 0$.

115. Sei $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \le x \le 1 \text{ , } 0 \le y \le 1 \text{ , } 1 \le z \le 2 \right\}$. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_I xyz\,\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z)$ *b)* $\displaystyle\int_I yz\sin(2x)\,\mathrm{e}^{y^2\cos x}\,d(x,y,z)$

c) $\displaystyle\int_I (xy)^z\,d(x,y,z)$ *d)* $\displaystyle\int_I x^2\cosh(xy)\,\mathrm{e}^{xz}\,d(x,y,z)$.

116. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei folgendermaßen definiert :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & , \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & , \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases} .$$

Zeigen Sie , daß f in $\binom{0}{0}$ nicht stetig und daß

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\; dy\Big)\; dx \neq \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\; dx\Big)\; dy \quad \text{ist.}$$

117. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen M des $\mathbb{R}^3$, geben Sie jeweils $\mathring{M}$, $\bar{M}$ und ∂M an , und prüfen Sie nach , ob M R - meßbar ist.

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x > 0 \;,\; y > 0 \;,\; z \geq 0 \;,\; x + y + 2z \leq 2 \right\}$,

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq z \;,\; 1 < z \leq 4 - x \right\}$.

118. Berechnen Sie $\displaystyle\int_M f(x,y)\; d(x,y)$ für

a) $f(x,y) = x(x+y)$, $M = \{\binom{x}{y} : 0 \leq x \leq 1 \;,\; x^2 \leq y \leq x\}$
b) $f(x,y) = x^2y^2$, $M = \{\binom{x}{y} : |x| + |y| \leq 1\}$
c) $f(x,y) = xy$, $M = \{\binom{x}{y} : x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \;,\; x^2 + y^2 \leq 1\}$
d) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $M = \{\binom{x}{y} : x \geq 0 \;,\; 0 \leq y \leq x \;,\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

119. Berechnen Sie jeweils mit Hilfe einer geeigneten Substitution $\displaystyle\int_M (x^2 + y^2)\; d(x,y)$ für

a) $M = \{\binom{x}{y} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$
b) $M = \{\binom{x}{y} : x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \;,\; 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \;,\; 1 \leq xy \leq 5\}$.

Skizzieren Sie jeweils die Menge M .

120. Berechnen Sie das Volumen und die Masse des Körpers

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 4 - x \right\}$ mit der Dichte $\varrho = x^2 + y^2$.

121. Berechnen Sie das Volumen der Menge

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \;,\; x^2 + z^2 \leq R^2 \;,\; y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$, $(R > 0)$.

Skizzieren Sie die Menge M .

122. Berechnen Sie das Volumen , den Schwerpunkt und die Trägheitsmomente T_x (bzg. der x-Achse) , T_z (bzg. der z-Achse) und T_s (bzg. der durch den Schwerpunkt gehenden Parallelachse zur x-Achse) des Körpers

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right\}$$

mit der konstanten Dichte $\varrho = 1$.

123. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Einheitstetraeders

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x + y + z \leq 1 \right\}$$

(konstante Dichte $\varrho = 1$) bzg. einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt (Richtung $\vec{r}$ mit $|\vec{r}| = 1$) . Für welche Richtung $\vec{r}$ wird das Trägheitsmoment maximal bzw. minimal ?

124. Sei $M_1 = \{ \binom{x}{y} : x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \}$ und $M_2 = \{ \binom{x}{y} : x^2 + y^2 \leq 1 \}$.
Untersuchen Sie , ob die folgenden Integrale konvergieren ,
und berechnen Sie ggf. den Grenzwert :

a) $\displaystyle\int_{M_1} \frac{e^{-y}}{(x+1)^3} \, d(x,y)$ b) $\displaystyle\int_{M_1} x^2 \, e^{-(x^2+y^2)} \, d(x,y)$

c) $\displaystyle\int_{M_i} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, d(x,y)$ d) $\displaystyle\int_{M_i} \frac{x}{x^2+y^2} \, d(x,y)$, $(i = 1, 2)$.

125. Berechnen Sie – falls konvergent – für $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$ und $M_2 = \mathbb{R}^3$ die folgenden Integrale $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \ i = 1, 2\right)$

a) $\displaystyle\int_{M_i} \frac{|z|}{r^\alpha} \, d(x,y,z)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$, b) $\displaystyle\int_{M_i} \frac{1}{r^2(1+r^2)} \, d(x,y,z)$.

126. Berechnen Sie die Tangentenvektoren und die Bogenlängen der Kurven

a) $K = \{ \binom{x}{y} : x = \ln \sqrt{1+t^2} \ , \ y = \arctan t \ , \ t \in [-1, 1] \}$

b) $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = \cosh t \ , \ y = \sinh t \ , \ z = t \ , \ t \in [0, 1] \right\}$

Skizzieren Sie diese Kurven .

127. Skizzieren Sie die beiden folgenden Kurven , und zeigen Sie , daß beide Kurven geschlossen sind . Berechnen Sie jeweils die Kurvenlänge und den Inhalt der von der Kurve umschlossenen Fläche

a) $K = \{ \binom{x}{y} : x = \cos^3 \varphi \ , \ y = \sin^3 \varphi \ , \ \varphi \in [0, 2\pi] \}$

b) $K = \{ \binom{x}{y} : x = r \cos \varphi \ , \ y = r \sin \varphi \ , \ r = 1 + \cos \varphi \ , \ \varphi \in [0, 2\pi] \}$.

128. Sei $\vec{V}: M \subset I\!R^3 \to I\!R^3$, $f: M \subset I\!R^3 \to I\!R$, M offen , $\vec{V} \in C^2(M)$ und $f \in C^2(M)$. Zeigen Sie , daß in M gilt :

a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{V}) = 0$, b) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$,
c) $\operatorname{div}(f\vec{V}) =< \operatorname{grad} f \, , \vec{V} > + f \operatorname{div} \vec{V}$,
d) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = f \operatorname{rot} \vec{V} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{V}$.

129. Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in I\!R^3$ fest , $M = I\!R^3 - \{\vec{a}\}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$,

$f(\vec{x}) =< \vec{a}, \vec{x} >$, $g(\vec{x}) = |\vec{a} - \vec{x}|$, $\vec{V}(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{x}$, $\vec{W}(\vec{x}) = \operatorname{grad} g(\vec{x})$.

Berechnen Sie in M :

a) $\operatorname{div} \vec{V}$ und $\operatorname{div} \vec{W}$, b) $\operatorname{rot} \vec{V}$ und $\operatorname{rot} \vec{W}$,
c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{V})$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{W})$,
d) $\operatorname{div}(\vec{V} \times \vec{W})$.

130. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$\int_K (ydx + zdy + xdz)$ und $\int_K (ydx + xdy + 2zdz)$ entlang

a) K : Strecke von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $K = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = \cos t \, , \ y = \sin t \, , \ z = \frac{4t}{\pi} \, , \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \}$.

131. Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$\int_K ((x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy)$ und $\int_K ((x^2 + y)dx + (y^2 + x)dy)$ entlang

a) K : Strecke von $\binom{0}{0}$ nach $\binom{1}{1}$,
b) K : Parabelbogen $(y = x^2)$ von $\binom{0}{0}$ nach $\binom{1}{1}$,
c) $K = K_1 \cup K_2$ mit K_1 : Strecke von $\binom{0}{0}$ nach $\binom{1}{0}$, K_2 : Strecke von $\binom{1}{0}$ nach $\binom{1}{1}$,
d) K : Ellipse $(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1)$ von $\binom{3}{0}$ nach $\binom{3}{0}$ im Gegenuhrzeigersinn .

132. Sei $M = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x > 0 \, , \ y > 0 \, , \ z > 0 \}$ und $\vec{V}: M \to I\!R^3$ mit

$V_1(x,y,z) = \dfrac{\alpha}{x^2 z}$, $V_2(x,y,z) = \dfrac{2}{y}$, $V_3(x,y,z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{xz^2}$, $(\alpha \in I\!R)$.

Für welche $\alpha \in I\!R$ besitzt $\vec{V}$ in M ein Potential ? Berechnen Sie für diese α das Kurvenintegral von $\vec{V}$ entlang

$K = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = 1 + \sin t \, , \ y = \cos t \, , \ z = 1 - \sin t \, , \ 0 \le t \le \frac{\pi}{4} \}$

direkt und mit Hilfe des Potentials .

133. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \left(\frac{2-y}{x^2+(y-2)^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)^T$.

a) Wo sind die Integrabilitätsbedingungen für $\vec{V}$ erfüllt ? Zeigen Sie, daß $\vec{V}$ in $G = \left\{\binom{x}{y}\ :\ y < 2\right\}$ ein Potential besitzt. Geben Sie in G alle Potentiale an.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von $\vec{V}$ entlang der folgenden Kurven K_i :
$K_1 = \{\binom{x}{y} : x = 3\cos t\ ,\ y = \sin t\ ,\ 0 \le t \le 2\pi\}$,
$K_2 = \{\binom{x}{y} : x = 3\cos t\ ,\ y = 4\sin t\ ,\ 0 \le t \le 2\pi\}$,
$K_3 = \{\binom{x}{y} : x = \cos t\ ,\ y = \sin t\ ,\ 0 \le t \le \pi\}$.

134. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche
$F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2+y^2+z^2 = R^2\ ,\ x^2+y^2 \le Rx\right\}\quad ,\quad (R > 0)$.

135. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Torus , der durch Rotation der Kreisfläche $\left\{\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} : z^2 + (x-a)^2 \le R^2\right\}\quad ,\quad (0 < R < a)$, um die z-Achse entsteht .

136. Gegeben sei die Fläche $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 0 \le z \le 2\right\}$.

a) Bestimmen Sie in jedem Punkt dieser Fläche die Tangentialebene und den Normaleneinheitsvektor .

b) Berechnen Sie den Fluß $\int_F < \vec{V}\ ,\ \vec{n} > d\sigma$ für das Vektorfeld $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ in Richtung der Normalen , die eine negative z-Koordinate hat .

137. Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\quad ,\quad \vec{V}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$.

a) Berechnen Sie direkt – ohne Benutzung der Integralsätze – den Fluß
$\int_{\partial M} < \vec{V}\ ,\ \vec{n} > d\sigma$ durch die Oberfläche des Einheitstetraeders
$M = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ z \ge 0\ ,\ x+y+z \le 1\right\}$ in Richtung der äußeren Normalen.

b) Zeigen Sie , daß $\vec{V}$ ein solenoidales Vektorfeld ist , und bestimmen Sie ein zugehöriges Vektorpotential .

138. Berechnen Sie direkt und mit Hilfe des Integralsatzes von Green das Kurvenintegral
$\int_K ((x^2+y)dx + (2x-y)dy)$ entlang des Zykloidenbogens
$K = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = t - \sin t\ ,\ y = 1 - \cos t\ ,\ t \in [0, 2\pi]\right\}$.

139. Sei $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x^2+y^2 \leq 4 \right\}$.

Berechnen Sie direkt und mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\partial F} (x^2 y dx + y dy + z dz)$ entlang der Randkurve von F.

140. Sei $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = x^2+y^2 \ , \ x^2+y^2 \leq 4 \right\}$ und $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$,

$\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor von F mit negativer z-Koordinate.

Berechnen Sie den Fluß $\displaystyle\int_F < \vec{V} \ , \ \vec{n} > d\sigma$

a) direkt

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

c) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes .

141. Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x > 0 \ , \ y > 0 \right\}$.

Drücken Sie die beiden folgenden Vektorfelder $\vec{V}$ durch Zylinder- oder Kugelkoordinaten aus, und berechnen Sie div $\vec{V}$, rot $\vec{V}$, ein Potential u von $\vec{V}$ in M – falls möglich – und Δu :

a) $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{-yz}{x^2+y^2} \ \vec{e}_x + \dfrac{xz}{x^2+y^2} \ \vec{e}_y + (\arctan \dfrac{y}{x}) \ \vec{e}_z$,

b) $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x \ \vec{e}_x + y \ \vec{e}_y + z \ \vec{e}_z)$.

142. Durch $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$ und $z = w$ werden in

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in I\!R^3 : \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \right\}$ neue Koordinaten u , v , w eingeführt.

a) Drücken Sie $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$ durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ und umgekehrt $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ durch $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$ aus.

b) Zeigen Sie, daß $\{\vec{e}_u \ , \ \vec{e}_v \ , \ \vec{e}_w\}$ ein ONS bilden.

c) Drücken Sie ∇f , div $\vec{V}$, rot $\vec{V}$ und Δf für $f : M \to I\!R$, $f \in C^2(M)$, und $\vec{V} : M \to I\!R^3$, $\vec{V} \in C^2(M)$, durch die neuen Koordinaten aus.

143. Gegeben sei die Funktion $u : I\!R^3 \to I\!R$ mit $u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$.

a) Zeigen Sie, daß u harmonisch ist in $I\!R^3$, und berechnen Sie die absoluten Extrema von u in $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \right\}$. Zeigen Sie, daß diese Extrema auf dem Rand von M angenommen werden.

b) Zeigen Sie direkt (durch Berechnung des Integrals) , daß der 1. Gaußsche Mittelwertsatz gilt :

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(x_0,y_0,z_0)} u(x,y,z) \ d\sigma \quad , \quad ((x_0,y_0,z_0)^T \in I\!R^3 \ , \ r > 0) \ .$$

Übungsaufgaben Teil 3

144. Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = y^2 + x \quad , \quad y(0) = -1$.
a) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem in der Umgebung von $\binom{0}{-1}$ eindeutig lösbar ist, und zeichnen Sie mit Hilfe des Richtungsfeldes den ungefähren Verlauf der Lösungskurve.
b) Berechnen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Picard - Lindelöf Näherungslösungen y_0 , y_1 und y_2 .

145. Lösen Sie die Anfangswertaufgaben
a) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} \quad , y(1) = 1 \quad ,$ b) $y' = \dfrac{2x - y + 4}{x - y + 3} \quad , \quad y(0) = 2$.

146. Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben
a) $y' = y \cot x + \dfrac{1}{\cos x} \quad , \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = 1$,
b) $y' = \dfrac{4}{1 - x^2}\, y + \dfrac{1 + x}{(1 - x)^3} \quad , \quad y(0) = 2$.

147. Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL
a) $xy' = y + x^2 y^3 \quad , \quad (x \neq 0)$,
b) $y = xy' - 2(y')^2$.
Welche geometrische Bedeutung haben die Lösungskurven im Falle b) (Skizze!) ?

148. Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL
$(x^2 + 1)(y' + y^2) = 2(xy - 1)$.

149. Untersuchen Sie, ob die folgenden DGL exakt sind. Bestimmen Sie ggf. einen integrierenden Faktor, und geben Sie jeweils die allgemeine Lösung an :
a) $(2xy + \mathrm{e}^x) + (x^2 + 2y)y' = 0$,
b) $(3x^2y^2 + 2xy^4) + (2x^2y^3 - 1)y' = 0$.
Bestimmen Sie auch jeweils die Lösung in expliziter Form für die Anfangsbedingungen :
im Falle a) $y(0) = 1$, im Falle b) $y(1) = 0$.

150. Bestimmen Sie alle Lösungen der DGL
$x^3y''' - 3x^2y'' + x(x^2 + 6)y' - (x^2 + 6)y = x^4$ in $\mathbb{R} - \{0\}$.
Hinweis : Eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL läßt sich einfach finden.

151. Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe
$x(1 + x^2)y'' - 2x^2y' + 2xy = (1 + x^2)^2 \quad , \quad y(1) = y'(1) = 0$.
Bestimmen Sie zunächst zwei Fundamentallösungen der zugehörigen homogenen DGL (eine Lösung läßt sich einfach finden). Zeigen Sie, daß diese Fundamentallösungen in $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der DGL mit Hilfe der Variation der Konstanten.

152. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden DGL

a) $x^4 y''' + 4x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = 1 \quad , \quad (x > 0)$,

b) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = x(1 + 3\ln x) \quad , \quad (x > 0)$.

Geben Sie jeweils auch alle Lösungen an, die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben.

153. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden DGL

a) $x^2 y'' + 2x^2 y' + (x^2 - 2)y = x^2 \mathrm{e}^{-x} \quad , \quad (x > 0)$,

b) $xy'' - y' - 16x^3 y = 32x^7 \quad , \quad (x \neq 0)$.

154. a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes die Lösung der AWA
$y' = y^2 + x \quad , \quad y(0) = -1 \quad , \quad (a_0 \ , \ a_1 \ , \ \dots \ , \ a_5$ sollen berechnet werden).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes die allgemeine Lösung der DGL

$y'' + 2xy' + 2y = 0$.

Geben Sie die Konvergenzradien der Fundamentallösungen an. *Eine* Fundamentallösung läßt sich in geschlossener Form schreiben. Geben Sie diese Form an.

155. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$xy'' + (\frac{1}{2} - x)y' - y = 0 \quad , \quad (x > 0)$,

mit Hilfe eines verallgemeinerten Potenzreihenansatzes. Geben Sie die Konvergenzradien der Fundamentallösungen an. *Eine* Fundamentallösung läßt sich in geschlossener Form schreiben. Geben Sie diese Form an.

156. Bestimmen Sie a) in $I\!R^2 - \{\vec{0}\}$ und b) in $I\!R^3 - \{\vec{0}\}$ alle Lösungen der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0 \quad , \quad (k > 0)$, die nur vom Abstand r zum Nullpunkt abhängen. Welche Lösungen bleiben für $r \to 0$ beschränkt ?

157. Lösen Sie die folgenden Eigenwertaufgaben

a) $y'' - \lambda y = 0 \quad , \quad y'(0) = y'(l) = 0 \quad , \quad (l > 0)$,

b) $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(1) = y(\mathrm{e}) = 0$.

158. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGL - Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + \cos x \\ y_2' &= 5y_1 - 2y_2 + \sin x \end{aligned}$$

a) durch Elimination ,

b) mit Hilfe von Eigenwerten, Eigenvektoren und Variation der Konstanten.

159. Bestimmen Sie die Lösung des DGL - Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \quad , \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

160. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGL - Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x} .$$

161. Gegeben sei das DGL - System 2.Ordnung

$u'' = 4v' - u$
$v'' = 9v - 4u'$

mit den Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $v(0) = 1$, $u'(0) = 2$, $v'(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie die Lösung dieses DGL - Systems.
b) Führen Sie das gegebene DGL - System (einschließlich der Anfangsbedingungen) in ein äquivalentes DGL - System 1.Ordnung über.

162. Berechnen Sie mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens Näherungen der Lösung der AWA

$y' = y^2 + x \quad , \quad y(0) = -1$,

an den Stellen $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$ und $x_4 = 0.4$.
Vergleichen Sie diese Werte mit den entsprechenden Näherungswerten von Aufgabe 144 b) und 154 a).

163. Berechnen Sie mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens Näherungen der Lösung der AWA

$y'' + 2y' + y = x \quad , \quad y(0) = 1 , y'(0) = 0$,

an den Stellen $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.2$.
Vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den Werten der exakten Lösung.

164. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden partiellen DGL

a) $xu_x + yu_y = x^2 + y^2 \quad , \quad (x \neq 0)$,
b) $(x - y)u_x + yu_y = y^2 \quad , \quad (y > 0)$.

165. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden partiellen AWA

a) $xyu_x + (1 + x)u_y = (1 + x)u \quad , \quad u(x, 0) = 2(\ln x + x) \quad , \quad (x > 0)$,
b) $yu_x + xe^x u_y = y^3 \quad , \quad u(0, y) = 2y^2$.

166. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangs-Randwert-Aufgabe (ARWA) mit Hilfe der Fouriermethode

$u_t = 4u_{xx} \quad , \quad (0 < x < l \ , \ t > 0)$,
$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$,
$u(x, 0) = x^2(3l - 2x)$.

Zeigen Sie, daß die Lösungsreihe 1 mal nach t bzw. 2 mal nach x gliedweise differenzierbar ist.

167. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden ARWA mit Hilfe der Fouriermethode

$u_t = u_{xx} + x \cos t + t \sin \pi x \quad , \quad (0 < x < 1 \ , \ t > 0)$,
$u(0, t) = 1 \quad , \quad u(1, t) = \sin t$,
$u(x, 0) = 1 - x$.

168. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden ARWA mit Hilfe der Fouriermethode

$u_{tt} = u_{xx} + u \quad , \quad (0 < x < \pi \ , \ t > 0)$,
$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$,
$u(x, 0) = \sin^3 x \quad , \quad u_t(x, 0) = \sin x$.

169. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden ARWA

$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad (a > 0\ ,\ 0 < x < \pi\ ,\ t > 0)\ ,$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,$
$u(x,0) = \sin x \quad , \quad u_t(x,0) = 16 \sin^5 x$

a) mit Hilfe der Methode von d' Alembert ,
b) mit Hilfe der Fouriermethode .

170. Sei $G = \{\binom{x}{y} : 0 < x < 1 \ ,\ 0 < y < 1\}$.
Lösen Sie das Dirichlet - Problem
$\Delta u = 0$ in G mit $u_{|\partial G} = x^2 + y^2$.

171. Bestimmen Sie alle Lösungen von

$u_{tt} = a^2 \Delta u$ in $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| < 1\}$,

die sich nach Einführung von Polarkoordinaten in der Form
$u(x,y,t) = v(r,\varphi,t) = f(r)g(\varphi)h(t)$ schreiben lassen, und für die gilt: $u_{|\partial G} = 0$.

172. Bestimmen Sie die Lösung von

$u_{tt} = a^2 \Delta u$ in $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| < 1\}$,

die nur von t und $r = |\vec{x}|$ abhängt, und für die gilt:
$u_{|\partial G} = 0,\ \ u(r,0) = 1 - r,\ \ u_t(r,0) = 0.$

173. a) Bestimmen Sie die Lösung von

$\Delta u = 0$ in $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| < 1\}$ mit $u_{|\partial G} = x^3 + y^3$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von

$\Delta u = 0$ in $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| > 2\}$ mit $u_{|\partial G} = 1 + y^2$,
u beschränkt für $r = |\vec{x}| \to \infty$.

c) Bestimmen Sie die Lösung von

$\Delta u = 0$ in $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < |\vec{x}| < 2\}$ mit $u_{|K_1(0)} = x$ und $u_{|K_2(0)} = 1$,
wobei $K_R(0) = \{\vec{x} : |\vec{x}| = R\}$.

Geben Sie jeweils die Lösung als Funktion von x und y an.

174. Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen

a) $f(t) = \dfrac{t^2}{(a^2 + t^2)^2}\ , \quad (a > 0)$

b) $f(t) = t\mathrm{e}^{-a|t|} \quad , \quad (a > 0)$

c) $f(t) = \dfrac{\cos 2t}{t^2 + 4t + 5}$

d) $f(t) = t \sin t\ \mathrm{e}^{-|t|}$.

175. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Fouriertransformation

$u_t = u_{xx} \quad , \quad (0 < x < \infty\ ,\ t > 0)\ ,$
$u(0,t) = 0 \quad , \ u$ beschränkt für $x \to \infty$,
$u(x,0) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

176. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Fouriertransformation

$u_{tt} = u_{xx} \quad , \quad (-\infty < x < \infty \ , \ t > 0) \ ,$
u beschränkt für $x \to \pm\infty$,
$u(x,0) = \frac{x}{1+x^2} \quad , \quad u_t(x,0) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

177. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangs-Randwert-Aufgabe mit Hilfe der Laplace-Transformation

$u_{tt} = u_{xx} + u \quad , \quad (0 < x < \pi \ , \ t > 0) \ ,$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,
$u(x,0) = \sin^3 x \ , \ u_t(x,0) = \sin x$.

178. a) Untersuchen Sie die Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenzverhalten, und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

$$z_n = \frac{(2-i)^n}{n^3} \quad , \quad z_n = \frac{n^2 e^{in\pi/2}}{n^2+i} \ ,$$
$$z_n = \frac{\cos n\pi + 3i^n}{n} \quad , \quad z_n = \frac{in^2+4}{n^2+in+2} \ .$$

b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-3i}{2+i}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} z^n \ ,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+ni) z^n \ .$$

179. Gegeben sei die Abbildung f mit $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Bestimmen Sie (mit Skizze) die Bilder $f(M)$ für

a) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *b)* $M = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| < 2\}$
c) $M = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 1\}$ *d)* $M = \{z \in \mathbb{C} : |Im\ z| < 1\}$.

180. Bestimmen Sie die gebrochen lineare Abbildung f , die die Fixpunkte 1 und i besitzt und für die $f(0) = \infty$ gilt.
Bestimmen Sie die Bilder $f(M)$ (mit Skizze) für

a) $M = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 0\}$ *b)* $M = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z > 0\}$
c) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ *d)* $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ Re\ z > 0,\ Im\ z > 0\}$.

181. Gegeben sei die gebrochen lineare Abbildung f mit $f(z) = \dfrac{z-i}{iz-1}$. Bestimmen Sie die Bilder $f(M)$ (mit Skizze) für

a) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *b)* $M = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 0,\ Im\ z > 0\}$
c) $M = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 1\}$ *d)* $M = \{z \in \mathbb{C} : |Im\ z| < 1\}$.

Geben Sie die inverse Abbildung an.

182. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Real- und Imaginärteil an. Bestimmen Sie die $z \in \mathbb{C}$, für die diese Funktionen stetig, komplex differenzierbar bzw. holomorph sind. Bestimmen Sie $f'(z)$ - falls komplex differenzierbar - und die Nullstellen von f.

a) $f(z) = z^2 - \bar{z}^2 + (z^2 - \bar{z}^2)^2$, b) $f(z) = \tanh z := \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$.

183. Bestimmen Sie jeweils die Bilder $f(G_i)$ (mit Skizze) für die Abbildungen

a) $f(z) = \mathrm{e}^{iz}$, b) $f(z) = i\mathrm{e}^{2iz} + 1$

und die Gebiete

$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z > 0,\ 0 < Re\ z < \frac{\pi}{4}\}$,
$G_2 = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z < 0,\ \frac{\pi}{2} < Re\ z < \pi\}$.

184. Bestimmen Sie die Bilder $f(G_i)$ (mit Skizze) für die Abbildungen

a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+i}$, b) $f(z) = \left(\dfrac{iz-1}{iz+1}\right)^2$

und die Gebiete

$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < arg\ z < \frac{\pi}{2}\}$, $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : \frac{3\pi}{2} < arg\ z < 2\pi\}$.

185. Für welche Funktionen $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x \sin y + y \cos y) + x^2 + \varphi(y)$ harmonisch (dh.: es gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$) ? Bestimmen Sie für diese φ alle in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen f mit $Re\ f = u$. Geben Sie f als Funktion von z an.

186. a) Berechnen Sie jeweils für den Hauptwert
$\log(1-i)$, $\log(-2)$, $(-1+i)^i$. $\arcsin(-i)$.

b) Gegeben seien die Gebiete
$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ z \neq 0\}$, $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < arg\ z < \frac{\pi}{4}\}$,
$G_3 = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 0,\ Im\ z > 0,\ |z| < 1\}$.
Bestimmen Sie die Bilder $f(G_i)$ (mit Skizze) für die Funktionen (Hauptwerte)
α) $f(z) = \log(z)$, β) $f(z) = z^{1/3}$.

187. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z > 0,\ 0 < Re\ z < \frac{\pi}{2}\}$ und
$f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \left(\dfrac{i\mathrm{e}^{iz}+i}{\mathrm{e}^{iz}-1}\right)^2$.
Bestimmen Sie $f(G)$ (mit Skizze), und untersuchen Sie, ob f in G lokal konform bzw. konform ist.
Geben Sie mindestens ein weiteres Gebiet $\tilde{G}$ an, das durch f auf $f(G)$ konform abgebildet wird.

188. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1,\ |z-i| < 1\}$.
Bestimmen Sie - falls möglich - eine Funktion f , die G auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet.

189. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_K \bar{z}^2\, dz$ für die folgenden positiv orientierten Kurven K :

a) K sei der Rand des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 1,\ 2i$

b) K sei der Kreis um i mit Radius 1 .

190. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_R} \frac{1}{|z|^2}\, dz$ für die geschlossene Kurve $K_R = K_{R,1} \cup K_{R,2} \cup K_{R,3} \cup K_{R,4}$ mit
$K_{R,1}$: reelle Achse von 1 nach R ,
$K_{R,2}$: Kreisbogen um 0 mit Radius R von R nach $Re^{i\alpha}$,
$K_{R,3}$: Gerade durch 0 mit $Arg\,\alpha$ von $Re^{i\alpha}$ nach $e^{i\alpha}$,
$K_{R,4}$: Kreisbogen um 0 mit Radius 1 von $e^{i\alpha}$ nach 1 , $(R > 1,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.
Existiert der Grenzwert für $R \to \infty$?

191. $K_R(z_0)$ sei der positiv orientierte Kreis um z_0 mit Radius R .
Berechnen Sie die folgenden Integrale für $R > 0,\ R \notin \{1,\ 2,\ 3\}$:

a) $\displaystyle\int_{K_R(0)} \frac{1}{z^2+4z+3}\, dz$ *b)* $\displaystyle\int_{K_R(0)} \frac{\cos z}{z^2-3z+2}\, dz$

c) $\displaystyle\int_{K_R(0)} \frac{e^{iz}}{z^2(z+i)}\, dz$ *d)* $\displaystyle\int_{K_R(0)} \frac{\sinh z}{(z-i)^4}\, dz$.

192. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt$, $(a > 0,\ b > 0)$,
indem Sie $\displaystyle\int_K \frac{1}{z}\, dz$ für $K = \{z = x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ (positiv orientiert) berechnen.

193. Berechnen Sie für $a > 0$
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin ax\, dx \ ,$$
indem Sie $\displaystyle\int_{K_R} e^{-z^2}\, dz$ für $K_R = K_{R,1} \cup K_{R,2} \cup K_{R,3} \cup K_{R,4}$ mit
$K_{R,1}$: reelle Achse von 0 nach R ,
$K_{R,2}$: Parallele zur imaginären Achse von R nach $R + i\frac{a}{2}$,
$K_{R,3}$: Parallele zur reellen Achse von $R + i\frac{a}{2}$ nach $i\frac{a}{2}$,
$K_{R,4}$: imaginäre Achse von $i\frac{a}{2}$ nach 0 ,
berechnen und den Grenzwert für $R \to \infty$ betrachten.

194. Für welche Funktionen $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$u(x,y) = y \sinh x \cos y + x \cosh x \sin y + y\varphi(x)$
der Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $f = u + iv$?
Bestimmen Sie diese φ und die zugehörigen Imaginärteile von f . Geben Sie f als Funktion von z an.

195. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\max_{|z|\le 1} \left|\frac{z^3}{3-z^2}\right|$, *b)* $\displaystyle\max_{|z|\le 1} |\cosh z|$,

und geben Sie jeweils die $z \in \mathbb{C}$ an, für die das Maximum angenommen wird.

196. Zeigen Sie, daß die Riemannsche Zetafunktion
$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^\infty e^{-z \ln n}$$
in $G = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 1\}$ holomorph ist. Bestimmen Sie $f'(z)$ und $\displaystyle\int_K f(z)\, dz$ für $K = \{z \in \mathbb{C} : z = 2 + it,\ 0 \le t \le 1\}$.

197. Geben Sie für die folgenden Funktionen f jeweils die Taylorreihen um $z_0 = 0$ an, und bestimmen Sie die zugehörigen Konvergenzradien :

$a)\ \ f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2} \qquad b)\ \ f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$

$c)\ \ f(z) = z^3 \mathrm{e}^{-z^2} \qquad d)\ \ f(z) = \dfrac{\sin z}{1-z}\ .$

198. Sei $R_{\alpha,\beta}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < |z - z_0| < \beta\}$.

Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z}$ in $R_{\alpha,\beta}(z_0)$ für

$a)\ \ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ z_0 = 0\ \ , \qquad b)\ \ \alpha = 1,\ \beta = \infty,\ z_0 = 0\ \ ,$

$c)\ \ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ z_0 = 1\ \ , \qquad d)\ \ \alpha = 1,\ \beta = 2,\ z_0 = 1\ \ .$

199. Wo konvergiert die Laurentreihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{3^{|n|}} z^n$?

Welche Funktion stellt sie in ihrem Konvergenzbereich dar ?

200. Bestimmen Sie die Laurentreihen der folgenden Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^z}{(z-1)^3}$ um $z_0 = 1$,

b) $f(z) = (z^2 - 1)\sin\dfrac{1}{z}$ um $z_0 = 0$.

Charakterisieren Sie die Singularitäten, und geben Sie jeweils dort die Residuen von f an.

201. Bestimmen und charakterisieren Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen

$a)\ \ f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2 \sinh z}\ \ , \quad b)\ \ f(z) = \dfrac{1}{z(\mathrm{e}^z - 1)}\ .$

Bestimmen Sie jeweils das Residuum von f in $z_0 = 0$ mit Hilfe der Laurententwicklung.

202. Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen jeweils an ihren Polen

$a)\ \ f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 + 2z + 5}\ \ , \qquad b)\ \ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^4 + 4z^2}\ \ ,$

$c)\ \ f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2 + z - 2)^2}\ \ , \qquad d)\ \ f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + 4z + 5)^3}\ \ .$

203. Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen jeweils an ihren Polen

$a)\ \ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2 \sin z}\ \ , \quad b)\ \ f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^2 \cosh z}\ \ .$

204. Berechnen Sie die folgenden Integrale - falls möglich - mit Hilfe des Residuensatzes

$a)\ \ \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^6 + 1}\, dx\ \ , \quad b)\ \ \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2 - 2x + 2)}\, dx\ \ .$

205. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \dfrac{x^2}{(a^2 + x^2)^2}$, $(a > 0)$,

- falls möglich - mit Hilfe des Residuensatzes.

Berechnen Sie die folgenden Integrale - falls möglich - mit Hilfe des Residuensatzes

206.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+2x+2)^2}\,dx \quad , \quad (a \in \mathbb{R}) \quad .$$

207.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{5-3\cos x}\,dx \quad .$$

208.

a) $$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)(1+x)}\,dx \quad , \quad$$ b) $$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^2(2+x)}\,dx \quad .$$

209. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$y'' + 4y = \cos^2 t \quad , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad ,$

mit Hilfe der Laplace-Transformation. Benutzen Sie bei der Rücktransformation - falls möglich - den Residuensatz.